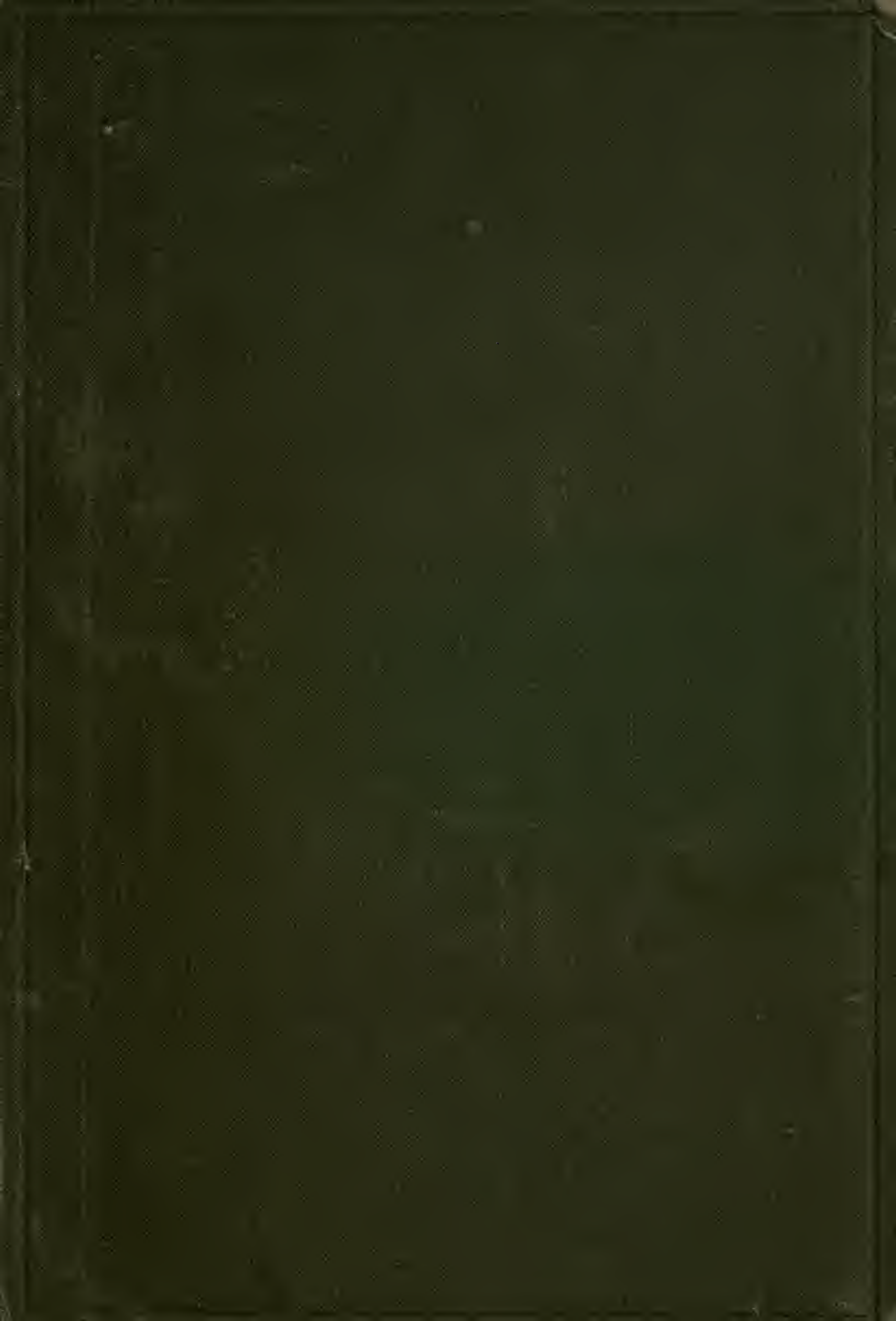
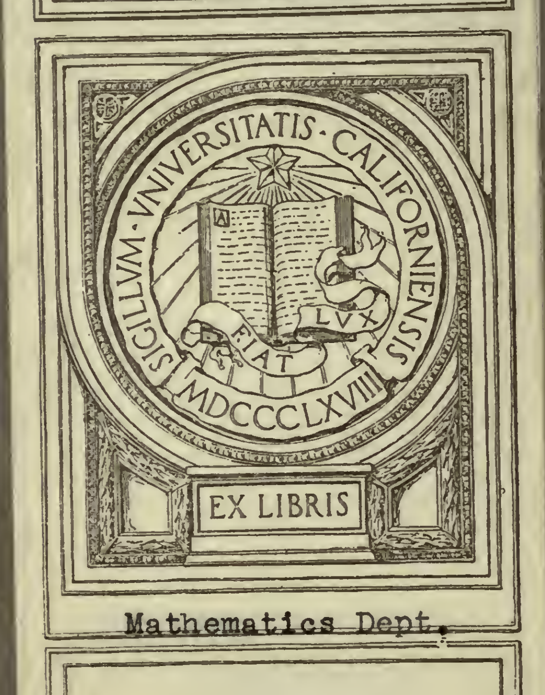



SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS

COURS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

COURS

d'Analyse Infinitésimale

PAR

Ch.-J. de la Vallée Poussin
Professeur à l'Université de Louvain
Membre de l'Académie Royale de Belgique

TOME I

Troisième édition
Considérablement remaniée

LOUVAIN
A. Uystpruyst-Dieudonné
ÉDITEUR
10, rue de la Monnaie, 10.

PARIS
Gauthier-Villars
ÉDITEUR
55, Quai des Grands Augustins, 55.

1914

Gift of Edward Bright to Mathematics Dept.

Avertissement de la troisième édition.

Le texte de cette troisième édition a été revu avec le plus grand soin et nous lui avons apporté un grand nombre d'améliorations de détail. Toutefois nous ne signalerons ici que les modifications les plus importantes.

En ce qui concerne la partie élémentaire ou le grand texte, nous avons abandonné l'ancienne définition de la différentielle totale et adopté celle de STOLZ (*). La supériorité de cette définition a été mise en lumière par les travaux de MM. S. PIERPONT (**), FRÉCHET (***) et surtout W. H. YOUNG (****). Elle est indiscutable ; les théorèmes découlant plus directement des principes, la théorie de la différentiation des fonctions explicites et implicites devient plus serrée et, par le fait, plus satisfaisante. Signalons encore que nous avons précisé les démonstrations relatives aux applications géométriques en introduisant les hypothèses de continuité ou de dérivabilité au fur et à mesure de leur nécessité seulement.

Passons maintenant aux théories plus élevées données dans le petit texte. Nous avons rejeté dans l'introduction et simplifié la théorie de la mesure des ensembles qui embarrassait précédemment le chapitre relatif aux intégrales définies. Nous avons refondu tout entière la théorie de l'intégrale de Lebesgue, mais nous avons conservé le procédé que nous avions introduit précédemment pour remonter de la dérivée à sa primitive. Plusieurs

---

(*) STOLZ. *Grunzuge der Differential und Integral-Rechnung*, t. I, Leipzig ; 1893.

(**) J. PIERPONT. *Theory of fonctions of real variables*, t. I, Boston ; 1905.

(***) M. FRÉCHET. *Sur la Notion de différentielle totale*. Nouvelles annales de mathématiques, 4e série, t. XII ; 1912.

(****) W. H. YOUNG. *The fundamental theorems of Differential Calculus*, Cambridge, 1910.

années d'expérience et nos recherches personnelles nous ont suffisamment montré ses avantages et sa fécondité. Aussi bien son utilité apparaîtra-t-elle dans deux paragraphes nouveaux, l'un consacré au problème du changement de variable dans une intégrale définie, problème qui paraît recevoir ici sa solution définitive, l'autre consacré à la recherche de la primitive d'une dérivée seconde généralisée, question fondamentale dans la théorie des séries de Fourier.

Nous avions donné, dès notre première édition, une démonstration très intuitive du théorème de JORDAN sur les courbes fermées. On lui a reproché de *n'être qu'indiquée* (*). Parmi d'autres, ce reproche est le seul qui nous ait paru réellement fondé. C'est pourquoi l'on trouvera dans cette édition la démonstration développée dans tous ses détails. Pour éviter toute équivoque, il convient d'ajouter que nous considérons tous les termes de cette démonstration comme susceptibles d'un sens *purement arithmétique*.

Puisse ce livre inspirer le goût de la réflexion et rendre service aux jeunes gens qui désirent approfondir les principes de l'Analyse.

Louvain, le 12 septembre 1913.

(*) *Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. II, v. I, p. 100.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

CHAPITRE I.

Dérivation des fonctions explicites d'une variable.

CHAPITRE II.

Formule de Taylor. Applications diverses.

CHAPITRE III.

Fonctions explicites de plusieurs variables.

CHAPITRE IV.

Fonctions implicites. Changement de variables.

CHAPITRE V.

Intégrales indéfinies. Méthodes classiques d'intégration.

CHAPITRE VI.

Théorie élémentaire des intégrales définies. Intégrale de Riemann.

CHAPITRE VII.

Intégrale de Lebesgue.

CHAPITRE VIII.

Formules fondamentales de la théorie des courbes planes.

CHAPITRE IX.

Formules fondamentales de la théorie des surfaces et des courbes gauches.

CHAPITRE X.

Calcul des aires, des arcs et des volumes. Evaluation approchée des intégrales définies.

CHAPITRE XI.

Des séries.



COURS D'ANALYSE INFINITESIMALE

INTRODUCTION

§ 1. Nombres réels

1. Nombres rationnels. — Les nombres entiers et les nombres fractionnaires positifs ou négatifs, y compris le nombre zéro, forment l'*ensemble des nombres rationnels.* Nous supposerons que l'on connaît les propriétés les plus élémentaires de ces nombres et que l'on sait effectuer sur eux les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique. Toutefois il y a lieu de rappeler ici les propriétés suivantes :

1° L'ensemble des nombres rationnels est *ordonné,* c'est-à-dire que de deux nombres rationnels différents a et b l'un est plus grand que l'autre, par exemple b est plus grand que a, ce qu'on écrit

$$a < b \text{ ou } b > a.$$

La notion d'*ordre* exprimée par cette relation se réduit d'ailleurs à cette seule propriété du signe d'inégalité que si a est $<$ b et $b < c$, on a aussi $a < c$.

2° Entre deux nombres rationnels différents a et b, on peut toujours en intercaler une infinité d'autres $>$ que l'un et $<$ que l'autre. On dit qu'un ensemble de nombres qui jouit de cette propriété est un ensemble *dense* et cette propriété s'appelle la *densité.*

2. Nombres irrationnels. — L'introduction des nombres irrationnels repose sur les considérations suivantes :

Supposons que par un procédé quelconque, et nous allons en indiquer plusieurs, on ait partagé tous les nombres rationnels en deux classes, une classe inférieure A et une classe supérieure

B, telles que tout nombre a de la première soit $<$ que tout nombre b de la seconde. Un tel partage s'appelle une *coupure*. D'abord il est clair, ce partage étant fait, que, si le nombre a est de la classe A, il en sera de même pour tout nombre $< a$ et que, si b est de la classe B, il en sera encore de même pour tout nombre $> b$. Ce premier point admis, je dis que trois cas pourront se présenter :

1° La classe inférieure A renferme un nombre m plus grand que tous les autres de la même classe, de sorte que tout nombre $< m$ est de la classe A et tout nombre $> m$ de la classe B. Le nombre m sépare donc la classe A de la classe B et nous l'appelons le *nombre frontière* des deux classes.

2° La classe superieure B renferme un nombre m plus petit que tous les autres de la même classe. Dans ce cas encore, m est la *frontière* des deux classes : tout nombre $< m$ est de la classe A et tout nombre $> m$ de la classe B.

Ces deux premiers cas s'excluent l'un l'autre, car, s'il y avait deux nombres frontières différents m et m', tous les nombres compris entre m et m' seraient à la fois de la classe A et de la classe B, ce qui est en contradiction avec la définition de ces classes. Donc, s'il y a un plus grand nombre dans la classe A, il n'y en a pas de plus petit dans la classe B, et réciproquement.

Ces deux premiers cas sont faciles à réaliser. Il suffit de se donner un nombre quelconque m, on range les nombres $< m$ dans la classe A, les nombres $> m$ dans la classe B. Le nombre m peut encore se ranger dans l'une ou dans l'autre. On obtient ainsi, à son choix, le premier ou le second des deux cas que nous venons d'examiner. Nous disons, dans l'un et dans l'autre, que le nombre m détermine la coupure (A, B) et que cette coupure est rationnelle.

3° Enfin il peut se faire qu'il n'y ait pas de plus grand nombre dans la classe A ni de plus petit nombre dans la classe B. Des considérations très simples conduisent à une semblable coupure. Soit, par exemple, m un nombre > 0 non carré parfait ; tous les nombres rationnels pourront se ranger en deux classes A et B, la classe A contenant tous les nombres négatifs et les nombres positifs dont le carré est $< m$, la classe B les nombres

positifs dont le carré est $> m$. Il n'y aura pas de plus grand nombre dans la classe A, car, étant donné un nombre quelconque a dont le carré est $< m$, on peut en trouver un autre plus grand en extrayant la racine carrée de m par défaut avec un nombre suffisant de décimales pour que le carré de cette racine soit plus rapproché de m que ne l'est de a^2. Pour une raison analogue, il n'y aura pas de plus petit nombre dans la classe B.

Lorsque cette circonstance se présente, nous disons que la coupure est *irrationnelle*. Il n'y a plus de nombre frontière séparant les deux classes, car ce nombre ne pourrait être que le plus grand de A ou le plus petit de B. Nous créons alors un nouveau symbole, par exemple $\sqrt{2}$, π,..., défini par la condition d'être plus grand que tous les nombres de A et plus petit que tous ceux de B, et nous disons que ce nouvel élément, qui s'intercale entre les nombres rationnels, est un *nombre irrationnel*.

L'ensemble des nombres irrationnels correspond à toutes les coupures possibles. Chaque nombre irrationnel est défini par la coupure (A, B) qui lui correspond, et nous pouvons désormais le représenter par une lettre tout comme un nombre rationnel.

Lorsqu'un nombre irrationnel α est compris entre deux nombres rationnels a et b dont la différence est égale ou inférieure à une fraction positive ε, on dit que a et b sont des *valeurs approchées* par défaut ou par excès de α à moins de ε près. Un nombre irrationnel α étant défini, on peut toujours en trouver des valeurs aussi rapprochées que l'on veut, ainsi qu'il résulte du théorème suivant :

Soit α le nombre irrationnel défini par la coupure (A, B) ; *quelque petite que soit la fraction positive ε, on peut trouver respectivement dans les classes* A *et* B *deux nombres a et b dont la différence soit égale à ε.*

En effet, soit a_1 un nombre de A, la progression

$$a_1, \quad a_1 + \varepsilon, \quad a_1 + 2\varepsilon, \quad a_1 + 3\varepsilon, \ldots$$

croissant indéfiniment, renfermera un premier terme de la classe B, par exemple $a_1 + n\varepsilon = b$. Alors le nombre précédent $a = a_1 + (n - 1)\,\varepsilon$ sera de la classe A et ces deux nombres a et b satisferont aux conditions du théorème.

3. Nombres réels. — L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels forme l'*ensemble des nombres réels.*

Pour *l'ordonner,* il faut indiquer les relations de grandeur entre ses éléments. Pour cela, il ne reste plus à définir que celles entre nombres irrationnels.

Soit α un nombre irrationnel défini par la coupure (A, B) ; un nombre irrationnel α' sera *égal* à α, s'il est défini par la même coupure, c'est-à-dire s'il est aussi supérieur à tous les nombres de A et inférieur à tous ceux de B ; mais α' sera *différent* de α s'il existe un nombre rationnel compris entre eux. Ainsi α' sera $> \alpha$ s'il est $>$ qu'un nombre de B, il sera $< \alpha$ s'il est $<$ qu'un nombre de A.

Le théorème suivant prouve que la *densité* est aussi une propriété de l'ensemble des nombres réels :

Entre deux nombres réels différents, on peut toujours intercaler un nombre rationnel et, par suite, une infinité.

Si les deux nombres sont irrationnels, le théorème se confond avec la définition même de l'inégalité. Si l'un des nombres est irrationnel et défini par la coupure (A, B), tandis que l'autre est rationnel, celui-ci sera de la classe A ou de la classe B et ne pourra être ni le plus grand de A ni le plus petit de B, la conclusion est donc la même. Enfin le théorème est supposé connu (n° 1, 2°) si les deux nombres sont rationnels.

L'ensemble des nombres réels jouit d'une propriété que ne possédait pas l'ensemble des nombres rationnels et que l'on peut exprimer par le théorème suivant :

Si, par un procédé quelconque, on fait une coupure (A, B) *dans l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire si l'on partage ces nombres en deux classes A et B, telles que tout nombre de la première soit $<$ que tout nombre de la seconde, il existe nécessairement un nombre frontière, rationnel ou non, m, qui détermine la coupure, c'est-à-dire tel que tout nombre $< m$ soit de la classe A et tout nombre $> m$ de la classe B.*

En effet, soit m le nombre rationnel ou irrationnel qui fait la frontière des deux classes de nombres rationnels respectivement comprises dans A et dans B. Tout nombre rationnel $> m$ est de la classe B et tout nombre rationnel $< m$ de la classe A. Reste à montrer que ces conclusions subsistent pour un nombre irrationnel.

Mais cela s'aperçoit de suite, car un nombre irrationnel $> m$ est $>$ qu'une infinité de nombres rationnels $> m$, lesquels sont de la classe B, donc il est de la classe B ; un nombre irrationnel $< m$ est $<$ qu'une infinité de nombres rationnels $< m$ et est avec eux de la classe A.

Les considérations précédentes laissent encore incomplète la définition mathématique des nombres irrationnels, il reste à y ajouter les définitions des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique.

4. Symétrique d'un nombre réel. — Nous appelons *symétrique* d'un nombre rationnel ce nombre changé de signe. La définition peut s'étendre aux nombres irrationnels. Soit α un nombre irrationnel défini par la coupure (A, B) ; désignons par — B la classe formée par les symétriques des nombres de B et par — A la classe formée par les symétriques des nombres de A ; tout nombre rationnel étant le symétrique d'un autre et tout nombre de la classe — B $<$ que tout nombre de la classe — A, la coupure (— B, — A) définit un nombre irrationnel que nous désignerons par $-\alpha$ et que nous appellerons le symétrique de α. On aura encore d'après cette définition $-(-\alpha) = \alpha$.

5. Nombres positifs et négatifs. Valeur absolue. — Les nombres positifs sont ceux qui sont > 0 et ils sont $>$ qu'une infinité de nombres rationnels egalement positifs. Les nombres négatifs sont ceux qui sont < 0 et ils sont $<$ qu'une infinité de nombres rationnels négatifs. Si un nombre est négatif, son symétrique est positif. Celui des deux nombres α ou $-\alpha$ qui est positif s'appelle la valeur absolue de α et se désigne par $|\alpha|$.

6. Inverse d'un nombre réel. — Soit α un nombre différent de zéro ; s'il est rationnel son inverse est $\frac{1}{\alpha}$ ou $1 : \alpha$. Supposons α irrationnel ; alors α partage tous les nombres rationnels de même signe que lui en deux classes A et B, dont la connaissance suffit évidemment pour le définir. Désignons par B^{-1} la classe formée par les inverses des nombres de B et par A^{-1} la classe formée par les inverses des nombres de A. Tout nombre rationnel autre que zéro étant l'inverse d'un autre, la coupure (B^{-1}, A^{-1}) de tous les nombres rationnels de même signe que α

en deux classes définit un nombre irrationnel de même signe, que nous désignerons par $1 : \alpha$ et que nous appellerons encore l'inverse de α.

7. Addition. — Soient α et α' deux nombres réels quelconques. Désignons par a et a', b et b', des nombres rationnels quelconques satisfaisant aux conditions :

$$a < \alpha < b, \qquad a' < \alpha' < b'.$$

Tous les nombres de la forme $a + a'$ seront $<$ que ceux de la forme $b + b'$. D'ailleurs on pourra supposer (n° 2) les valeurs de a et de b suffisamment rapprochées de α, celles de a' et de b' suffisamment rapprochées de α', pour que les différences $b - a$, $b' - a'$ et par suite $(b + b') - (a + a')$ deviennent aussi petites que l'on veut.

Je dis qu'il existe un nombre réel α'' et un seul $>$ que tout nombre de la forme $a + a'$ et $<$ que tout nombre de la forme $b + b'$ et dont ces deux sommes représentent des valeurs aussi rapprochées que l'on veut par excès ou par défaut, Ce nombre α'' s'appelle la *somme* de α et de α' et se désigne par $\alpha + \alpha'$.

En effet, considérons la coupure (A, B) de l'ensemble des nombres réels, la classe B contenant ceux qui surpassent tous les nombres de la forme $a + a'$ et la classe A les autres nombres. En particulier, tous les nombres de la forme $a + a'$ sont de la classe A et tous ceux de la forme $b + b'$ de la classe B. Comme il n'y a pas de plus grand nombre de la forme $a + a'$ ni de plus petit de la forme $b + b'$, le nombre frontière α'' entre les deux classes A et B sera plus grand que tous les premiers et plus petit que tous les seconds. Il reste donc seulement à montrer que le nombre qui jouit de cette propriété est unique. A cet effet, remarquons que, s'il existait deux nombres fixes toujours supérieurs aux nombres $a + a'$ et inférieurs aux nombres $b + b'$, on pourrait trouver deux nombres rationnels r et r' compris entre ces nombres fixes et qui jouiraient de la même propriété. Or ceci est impossible, car on peut supposer la différence $(b + b') - (a + a')$ inférieure à $r - r'$.

Cette définition, qui contient comme cas particulier celle de l'addition des nombres rationnels, permet de vérifier immé-

diatement que l'on a conservé les propriétés commutative et associative de l'addition, exprimées par les équations :

$$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha,$$
$$(\alpha + \alpha') + \alpha'' = \alpha + (\alpha' + \alpha''),$$

que l'on a encore

$$\alpha + 0 = \alpha, \qquad \alpha + (-\alpha) = 0,$$

enfin que la valeur absolue d'une somme ne peut surpasser la somme des valeurs absolues de tous ses termes.

8. Multiplication. — Soient α et α' deux nombres réels positifs : désignons encore par a et b, a' et b' des nombres rationnels et positifs quelconques assujettis à vérifier les inégalités :

$$a < \alpha < b, \qquad a' < \alpha' < b'.$$

Tous les produits de la forme aa' seront $<$ que ceux de la forme bb' et l'on pourra supposer les différences $b - a$, $b' - a'$ et $bb' - aa'$ aussi petites que l'on voudra. On montrera, en raisonnant comme dans le cas de l'addition, qu'il existe un nombre réel positif et un seul $\alpha'' >$ que tout produit de la forme aa' et $<$ que tout produit de la forme bb'. Ces produits peuvent être supposés aussi rapprochés qu'on veut du nombre α''. Celui-ci se nomme le *produit* des nombres α et α' et se désigne par $\alpha\alpha'$.

Si l'un des deux nombres α, α' ou tous les deux sont négatifs, la définition du produit se ramène à la précédente par la règle des signes, c'est-à-dire par les relations

$$\alpha\alpha' = -\alpha(-\alpha') = (-\alpha)(-\alpha').$$

Ces définitions permettent de vérifier immédiatement que l'on a conservé les propriétés commutative, associative et distributive de la multiplication, exprimées par les relations générales :

$$\alpha\alpha' = \alpha'\alpha, \qquad (\alpha\alpha')\alpha'' = \alpha(\alpha'\alpha''), \qquad \alpha(\alpha' + \alpha'') = \alpha\alpha' + \alpha\alpha''.$$

On a encore

$$\alpha . \frac{1}{\alpha} = 1. \qquad \alpha . 1 = \alpha, \qquad |\alpha\alpha'| = |\alpha|\ |\alpha'|.$$

Enfin un produit de plusieurs facteurs ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul et est toujours nul dans ce cas.

9. La soustraction est l'opération inverse de l'addition. Sous-

traire α' de α c'est détermiuer le nombre qu'il faut ajouter à α' pour obtenir α. Ce nombre s'appelle la *différence* de α et α' et on le désigne par $\alpha - \alpha'$. Pour le déterminer, posons $x = \alpha - \alpha'$; on aura la condition $\alpha' + x = \alpha$, et, en ajoutant $-\alpha'$ aux deux membres, on obtient, par les propriétés de l'addition, $x = \alpha + (-\alpha')$. Donc la différence $\alpha - \alpha'$ s'obtient en ajoutant à α le symétrique de α'. Cette règle ramène la soustraction à l'addition et prouve que cette opération a toujours une solution et une seule.

10. La division est l'opération inverse de la multiplication. Diviser α par α' c'est déterminer un nombre dont le produit par α' reproduise α. Ce nombre s'appelle le *quotient* de α par α' et se représente par $\alpha : \alpha'$. Pour le déterminer, posons $x = \alpha : \alpha'$; on aura la condition $x\alpha' = \alpha$. Si α' n'est pas nul, on peut multiplier les deux membres de cette égalité par $1 : \alpha'$, et on en tire, par les propriétés de la multiplication, $x = \alpha\,(1 : \alpha')$. Donc le *quotient* de α par α' est égal au produit de α par l'inverse de α'. Cette règle ramène la division à la multiplication et prouve que cette opération a toujours une solution et une seule, pourvu que le diviseur soit différent de zéro.

Il est maintenant facile de montrer que toutes les règles de l'algèbre élémentaire pour la transformation et la combinaison des égalités et des inégalités, subsistent avec les quantités généralisées. Nous ne nous y arrêterons pas davantage.

§ 2. Variables réelles. Théorie des limites

11. Continuité de l'ensemble des nombres réels. — Les nombres réels, c'est-à-dire les nombres tant rationnels qu'irrationnels, servent à exprimer la mesure des grandeurs *continues*, longueurs, aires, volumes, etc. On dit aussi que l'ensemble des nombres réels est un ensemble continu et l'on peut, au point de vue mathématique, définir la *continuité* de cet ensemble par les deux propriétés suivantes :

1° Entre deux nombres réels différents on peut toujours en intercaler une infinité d'autres $>$ que l'un et $<$ que l'autre.

2° Si l'on partage tous les nombres réels en deux classes A et B, telles que tout nombre de A soit $<$ que tout nombre de B,

ces deux classes seront séparées par un nombre frontière m qui sera le plus grand de A ou le plus petit de B, mais tout nombre $< m$ sera de la classe A et tout nombre $> m$ de la classe B.

Nous avons montré dans un paragraphe précédent (n° 3) comment on peut démontrer ces propriétés en toute rigueur, en les faisant reposer sur des définitions purement arithmétiques. Mais, quand on applique les nombres réels à la mesure des grandeurs concrètes, on admet comme un postulat qu'à toute grandeur correspond un nombre et réciproquement.

12. Bornes d'un ensemble de nombres. — Souvent on considère l'ensemble fini ou infini de tous les nombres qui satisfont à certaines conditions précises. Par exemple, on peut considérer l'ensemble des restes d'une division, celui des réduites d'une fraction continue (limitée ou non), celui des nombres rationnels, celui des fractions proprement dites comprises entre 0 et 1, etc. La notion des *bornes* d'un ensemble est alors fondamentale.

Un ensemble est *borné supérieurement* si l'on peut assigner un nombre A plus grand que tous ceux de l'ensemble ; il sera *borné inférieurement* si l'on peut assigner un nombre a plus petit que tous ceux de l'ensemble. S'il est borné dans les deux sens, on dira simplement qu'il est *borné*.

Quand un ensemble est borné supérieurement, il existe un plus petit nombre qui n'est inférieur à aucun de ceux de l'ensemble : c'est la frontière des deux classes de nombres A et B, A contenant les nombres inférieurs à un nombre au moins de l'ensemble, et B les autres nombres. Cette frontière s'appelle la *borne supérieure* de l'ensemble. C'est le plus petit nombre de la classe B, car il ne peut y en avoir de plus grand dans la classe A. L'ensemble d'un nombre limité de nombres est évidemment borné par le plus grand d'entre eux, mais un ensemble infini peut ne pas renfermer un nombre plus grand que tous les autres (égalité non exclue). Dans ce dernier cas, la borne supérieure n'est pas un nombre de l'ensemble et l'on dit qu'elle est *inaccessible*. C'est ainsi que la borne supérieure des fractions comprises entre 0 et 1 est 1 et n'appartient pas à l'ensemble (car 1 n'est pas une fraction).

De même, un ensemble borné inférieurement admet une *borne inférieure* : c'est le plus grand nombre qui n'est supérieur à aucun de ceux de l'ensemble.

En résumé, on voit que si m et M sont les bornes inférieure et supérieure d'un ensemble borné, l'ensemble ne contient aucun nombre $< m$ ni $>$ M, mais il en contient certainement de $< m + \varepsilon$ et de $> \text{M} - \varepsilon$ quelque petit que soit le nombre positif ε.

La différence entre les bornes supérieure et inférieure s'appelle l'*oscillaton* de l'ensemble.

13. Variables réelles en général. — Soit x une *variable réelle*, c'est-à-dire une quantité qui passe par une infinité de valeurs réelles. Considérons l'ensemble de toutes les valeurs que peut recevoir x. Si cet ensemble est borné supérieurement ou inférieurement, la variable x est aussi bornée supérieurement ou inférieurement et les bornes de l'ensemble sont les *bornes supérieure* ou *inférieure* de x.

On dit que *la variable x varie dans l'intervalle* (a, b), lorsqu'elle peut recevoir toutes les valeurs comprises entre a et b, y compris ces valeurs extrêmes. Nous supposons toujours, sauf indication contraire, que l'on a $a < b$. Ces nombres sont donc les bornes inférieure et supérieure de x et elles sont *accessibles*.

Si x reçoit toutes ces mêmes valeurs sauf la seule valeur a, ou bien sauf la seul valeur b, ou bien encore sauf les deux seules valeurs a et b, on écrit respectivement, pour indiquer que ces bornes sont alors inaccessibles, que x varie dans les intervalles $(a + 0, b)$, ou bien $(a, b - 0)$, ou enfin $(a + 0, b - 0)$.

Quand x peut prendre toutes les valeurs comprises entre a et b et ces deux valeurs elles-mêmes, on dit que x varie dans cet intervalle *au sens large*. Au contraire, x varie dans l'intervalle (a, b) *au sens étroit* si x ne peut pas prendre les valeurs a et b.

Les valeurs de x qui sont $> a$ et $< b$ sont dites *intérieures* à l'intervalle (a, b). Quand x varie dans l'intervalle (a, b) *au sens étroit*, x ne prend donc que les valeurs intérieures à l'intervalle (a, b).

La variation de x se représente géométriquement par le déplacement d'un point sur une droite indéfinie OO' ; on porte

sur OO′ une longueur $OX = x$ dans un sens déterminé par le signe de x. Sauf indication contraire, on suppose la droite horizontale et les segments positifs comptés de gauche à droite. Par allusion à cette représentation, une valeur particulière de x s'appelle un point, la valeur $x = a$ le point a, etc.

14. Limite d'une variable. — Soit x une variable réelle qui passe *successivement* par une infinité de valeurs suivant une loi quelconque, de telle sorte qu'à chaque valeur prise par x, on puisse distinguer les valeurs qui précèdent de celles qui suivent et qu'aucune valeur de x ne soit la dernière. On dit que x *tend vers une limite déterminée,* si les valeurs successives de x se rapprochent d'un nombre déterminé a, de telle sorte que la différence $x - a$ *finisse* par décroître en valeur absolue en dessous de tout nombre positif donné ε si petit qu'il soit. On dit alors que x a pour limite a et l'on écrit

$$\lim x = a.$$

Suivant cette définition, une même variable ne peut pas tendre simultanément vers deux limites différentes a et b $(b > a)$. car $(x - a)$ et $(x - b)$ ne peuvent être simultanément inférieurs en valeur absolue à la moitié de $(b - a)$.

Si les valeurs de x finissent par surpasser *définitivement* tout nombre assignable, on dit, par extension, que x a une *limite infinie* et tend vers $+\infty$.

De même, si x décroît *définitivement* en dessous de tout nombre négatif assignable, on dira que x a pour limite $-\infty$.

15. Plus grande et plus petite limite. — Considérons encore une variable x qui passe *successivement* par une infinité de valeurs *finies*. Si x est bornée supérieurement, il y a des nombres auxquels x finit par rester *définitivement* inférieur. Si ceux-ci ont une borne inférieure A, on l'appelle *la plus grande limite de x* ; et on écrit

$$\overline{\lim}\, x = A.$$

De même, si x est bornée inférieurement, il y a des nombres auxquels x finit par rester *définitivement* supérieur. Si ceux-ci

ont une borne supérieure a, on l'appelle *la plus petite limite de x* et l'on écrit

$$\underline{\lim}\, x = a.$$

Les plus grande et plus petite limites s'appellent aussi les *limites d'indétermination* de x.

Si la variable x est bornée supérieurement et inférieurement, ces deux limites existeront toujours et seront comprises entre les bornes supérieure et inférieure de x, la coïncidence avec ces bornes étant également possible.

La plus grande limite A est donc définie par cette propriété que, quelque petit que soit le nombre positif ε, la variable x finit par *rester* $< A + \varepsilon$, tandis qu'elle n'est jamais définitivement $< A - \varepsilon$. — Pareillement, la plus petite limite a est définie par cette propriété que la variable x finit par *rester* $> a - \varepsilon$, tandis qu'elle n'est jamais définitivement $> a + \varepsilon$. D'après cela. A est supérieur ou égal à a.

Si les deux limites a et A sont différentes, on peut prendre ε assez petit pour que $A - \varepsilon$ soit encore $> a + \varepsilon$; dans ce cas, x oscille indéfiniment dans tout l'intervalle de $a + \varepsilon$ à $A - \varepsilon$ et en sort : x ne peut avoir de limite déterminée. Au contraire, si $A = a$, x finit par rester dans un intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aussi resserré qu'on le voudra et x a pour limite a. De là, le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable x ait une limite finie et déterminée est qu'elle soit bornée et que l'on ait

$$\underline{\lim}\, x = \overline{\lim}\, x.$$

Lorsque x n'est pas borné supérieurement, on dit, par extension, que sa plus grande limite est $+\infty$; si x n'est pas borné inférieurement, on dit encore que sa plus petite limite est $-\infty$.

Si la variable x a une limite infinie, soit $+\infty$ soit $-\infty$, on dit encore que les plus grande et plus petite limites coïncident et sont égales à cette limite infinie.

Avec cette extension, la relation

$$\underline{\lim}\, x = \overline{\lim}\, x$$

exprime *la condition nécessaire et suffisante pour que x ait une limite (finie ou infinie).*

16. Critère de convergence (Cauchy). — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable x qui passe par une succession illimitée de valeurs, ait une limite finie et déterminée est que, à tout nombre positif si petit qu'il soit ε, corresponde au moins une valeur de x qui diffère de moins de ε de toutes les suivantes.*

Il est clair que, dans ce cas, la variable x est bornée et je dis que ses plus grande et plus petite limites A et a ne peuvent différer.

Sinon, en effet, on pourrait choisir un nombre positif ε' assez petit pour que $a + \varepsilon'$ fût encore $< A - \varepsilon'$, la variable x oscillerait indéfiniment d'un de ces deux nombres à l'autre (même en les dépassant), aucune valeur de x ne pourrait donc différer de toutes les suivantes d'une quantité inférieure à la moitié de cet intervalle, ni, par suite, inférieure à ε (si ε est supposé moindre que cette moitié).

La condition est donc suffisante. Il est évident qu'elle est nécessaire, car, si les valeurs de x se rapprochent indéfiniment d'un nombre a, elles finissent par différer aussi peu qu'on veut les unes des autres. Le théorème est démontré.

Le critère de convergence est plus simple si la variable x est *monotone,* c'est-à-dire si elle est : soit constamment croissante (ou stationnaire), soit constamment décroissante (ou stationnaire). On l'énonce comme il suit :

Si la variable x varie toujours dans le même sens (est monotone), la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait une limite finie est qu'elle soit bornée.

En effet, si la variable est croissante, elle tendra vers sa borne supérieure A, car elle ne peut surpasser A, tandis qu'elle surpasse définitivement tout nombre moindre. De même, si elle décroit, elle a sa borne inférieure pour limite.

On énonce souvent cette règle en disant qu'*une variable qui varie toujours dans le même sens a une limite finie ou infinie.*

Les critères de convergence sont généraux et s'appliquent quel que soit le mode de variation de x.

Ces modes sont très variés. Tantôt x tendra vers sa limite d'une manière continue en passant par toutes les valeurs intermédiaires, tantôt d'une manière discontinue en passant par une

suite illimitée de valeurs isolées. Dans ce dernier cas, il arrive le plus souvent que les valeurs successives de x peuvent être toutes numérotées dans l'ordre de leur succession :

$$x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots x_{n+p}, \ldots$$

Tel est le cas pour les sommes successives des termes d'une série, les réduites successives d'une fraction continue, etc... Le critère de Cauchy peut alors s'énoncer comme il suit :

La condition nécessaire et suffisante pour que la suite x_1, x_2, $x_3, \ldots x_n, \ldots$ ait une limite finie et déterminée est qu'à tout nombre positif ε si petit qu'il soit, corresponde un indice n tel que la condition

$$| x_{n+p} - x_n | < \varepsilon$$

ait lieu pour tous les indices $n + p$ supérieurs à n.

17. Limite d'une fonction. — Quand les valeurs d'une variable y sont déterminées par celles que reçoit une autre variable x, on dit que y est une fonction de x.

Il peut alors se faire que, quand on donne à x une suite de valeurs ayant pour limite a (la valeur a elle-même étant généralement exclue), la suite des valeurs correspondantes de y ait pour limite b. On écrit alors

$$\lim_{x=a} y = b.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que y ait une limite finie b quand x tend vers a est donc qu'à tout nombre positif ε corresponde un nombre positif δ, tel que l'inégalité $| x - a | < \delta$ entraîne $| y - b | < \varepsilon$.

Si l'on observe qu'une valeur de y suffisamment éloignée dans la suite correspond à une valeur de x suffisamment voisine de a, on voit que le critère de convergence de Cauchy prend la forme suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que y ait une limite finie quand x tend vers a est qu'à tout nombre positif ε corresponde un nombre positif δ tel que, à deux valeurs de x qui diffèrent de a de moins de δ, correspondent deux valeurs de y qui diffèrent entre elles de moins de ε.

Il est important de remarquer que y peut avoir une limite

quand on fait tendre x vers a par une suite de valeurs soumises à certaines restrictions, par exemple toutes $> a$, ou toutes rationnelles, etc. Ce sont alors ces valeurs seulement que l'on doit considérer dans la condition de convergence.

On représente souvent par

$$\lim_{x=a+0} y, \qquad \lim_{x=a-0} y,$$

les limites de y quand x tend vers a en restant soit $> a$, soit $< a$.

Si y a une plus grande ou une plus petite limite quand x tend vers a, on pourra aussi les représenter par

$$\overline{\lim_{x=a}}\, y \quad \text{ou} \quad \underline{\lim_{x=a}}\, y.$$

Si y a une limite b quand x tend vers l''infini, c'est à dire si y diffère aussi peu qu'on veut de b à condition que x soit suffisamment grand, les notations seront analogues aux précédentes en faisant $a = \infty$.

Ces considérations s'étendent aux fonctions de plusieurs variables. Si la valeur de u dépend des valeurs de $x, y, \ldots$ on dira que u a pour limite m quand $x, y, \ldots$ tendent respectivement vers $a, b, \ldots$ d'une manière quelconque, si à tout ε positif correspond un δ positif tel que la différence $|u - m|$ soit $< \varepsilon$ sous la condition que $|x - a|, |y - b|, \ldots$ soient $< \delta$.

Il est souvent utile d'observer que, si u et v dépendent des mêmes variables, on a évidemment

$$\overline{\lim}\,(u + v) \leqslant \overline{\lim}\, u + \overline{\lim}\, v.$$

Cette relation est susceptible d'un grand nombre de formes équivalentes, en vertu de l'identité

$$\overline{\lim}\, u = -\underline{\lim}\,(-u).$$

En changeant d'abord le signe de v, ensuite u en $u + v$, on a

$$\overline{\lim}\,(u - v) \leqslant \overline{\lim}\, u - \underline{\lim}\, v,$$
$$\overline{\lim}\,(u + v) \geqslant \overline{\lim}\, u + \underline{\lim}\, v,$$
$$\overline{\lim}\,(u - v) \geqslant \overline{\lim}\, u - \overline{\lim}\, v$$

et, en changeant les signes des deux membres, puis ceux de u, v,

$$\underline{\lim}\,(u - v) \geqslant \underline{\lim}\, u - \overline{\lim}\, v$$
$$\underline{\lim}\,(u + v) \leqslant \underline{\lim}\, u + \overline{\lim}\, v, \text{ etc.}$$

Toutes ces relations s'aperçoivent d'ailleurs directement comme la première.

18. Principes de la théorie des limites. — I. *La limite d'une somme, d'une différence, d'un produit de variables qui tendent vers des limites finies et déterminées, est égale à la somme, à la différence, au produit de ces limites. La limite d'un quotient de variables qui tendent vers des limites finies et déterminées, est égale au quotient de ces limites, pourvu que la limite du dénominateur soit différente de zéro.*

Ces propositions se démontrent toutes de la même façon, choisissons la dernière comme exemple. Soient deux variables x et y ayant respectivement pour limites a et b ; on pourra poser

$$x = a + \alpha, \qquad y = b + \beta,$$

α et β ayant pour limite zéro. On en tire

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)}.$$

Si b est différent de zéro, cette dernière quantité peut être rendue aussi petite que l'on veut avec α et β, donc $\frac{x}{y}$ a pour limite $\frac{a}{b}$.

De la combinaison des propositions précédentes, on déduit le théorème suivant :

II. *Soit* $R(x, y, \ldots)$ *une expression rationnelle quelconque des variables* $x, y, \ldots$, *c'est-à-dire une expression dont le calcul ne comporte que les quatre opérations fondamentales, si les variables* $x, y \ldots$ *ont respectivement pour limites* $a, b, \ldots$, $R(x, y \ldots)$ *aura pour limite* $R(a, b, \ldots)$.

Ce théorème est soumis toutefois à cette restriction que, si parmi les opérations à effectuer sur les nombres $a, b, \ldots$ figure une division, le diviseur ne soit pas nul.

III. *Si deux variables restent constamment égales et si l'une tend vers une limite déterminée, finie ou infinie, l'autre tend vers la même limite.*

En effet, si u a pour limite a, $u - a$ décroît indéfiniment ; si $u = v$, $v - a = u - a$ décroît aussi indéfiniment et v a aussi pour limite a. La démonstration est analogue si la limite est infinie.

IV. *Une quantité variable qui reste constamment comprise entre deux autres qui ont la même limite finie ou infinie, tend aussi vers la même limite.*

En effet, si w est compris entre deux variables u et v qui tendent vers a *fini*, $w - a$ sera compris entre $u - a$ et $v - a$ qui décroissent indéfiniment et décroîtra lui-même indéfiniment. Donc w a pour limite a. Le raisonnement est analogue si la limite est infinie.

19. Méthode des limites. — Lorsqu'on a obtenu une relation entre des variables qui subsiste pour une infinité de valeurs des variables, on peut, en s'appuyant sur les principes précédents, y remplacer les variables par leurs limites. Cette opération porte le nom de *passage à la limite*. Cette nouvelle opération qui s'ajoute aux quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, caractérise l'*analyse infinitésimale.*

La *méthode des limites* consiste à trouver des relations entre les quantités par passage à la limite.

La méthode des limites se décompose en plusieurs branches suivant la nature des variables que l'on considère dans ce passage à la limite (séries, produits infinis, fractions continues, calcul différentiel, calcul intégral).

20. Méthode infinitésimale. — Lorsqu'une quantité variable a pour limite zéro, on dit que c'est une *quantité infiniment petite* ou un *infiniment petit*. Au contraire, une quantité infiniment grande est une quantité variable qui augmente au-delà de toute limite assignable.

La *méthode infinitésimale* est celle où l'on se sert de la considération des infiniment petits. Dans le *calcul différentiel*, on considère les quantités comme limites du rapport de deux infiniment petits. Dans le *calcul intégral*, on les considère comme limites d'une somme d'un nombre indéfiniment croissant d'infiniment petits.

Dans les questions où on les considère, on établit le plus souvent, entre les divers infiniment petits que l'on rencontre, une classification très importante, qui s'appuie sur les définitions suivantes :

On dit qu'une quantité α est *infiniment petite par rapport à une*

autre β, lorsque le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ a pour limite 0. Au contraire, les deux infiniment petits sont *du même ordre* si leur rapport a une limite finie et différente de zéro.

Dans beaucoup de questions, on est amené à choisir un infiniment petit particulier α, que l'on appelle *infiniment petit principal*, et qui sert à classer tous les autres. Un infiniment petit du même ordre que α s'appelle alors *du premier ordre* et un infiniment petit de l'ordre de α^r est de l'ordre r.

Lorsqu'une quantité est décomposée en une somme de termes qui sont des infiniment petits d'ordres différents, on donne le nom de *terme principal* à celui qui est de l'ordre le moins élevé.

On appelle *expression asymptotique* d'une quantité une expression qui n'en diffère que par un infiniment petit d'un ordre assigné.

21. Principes de substitution des infiniment petits. — Les avantages de la méthode infinitésimale résultent des deux principes fondamentaux connus sous ce nom.

I. *La limite du rapport de deux infiniment petits α et β n'est pas changée quand on leur substitue respectivement deux autres infiniment petits α' et β', pourvu que $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\beta}{\beta'}$ aient pour limite l'unité.*

En effet, de l'identité

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\alpha'}{\alpha} \times \frac{\beta}{\beta'}$$

on conclut, par les principes de la méthode des limites,

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \lim \frac{\alpha'}{\alpha} \lim \frac{\beta}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

La remarque suivante sert souvent à reconnaître que le rapport de deux infiniment petits tend vers l'unité :

Si β reste compris entre deux infiniment petits α et α' dont le rapport tend vers l'unité, il en sera de même des rapports $\beta : \alpha$ et $\beta : \alpha'$.

En effet, en divisant les inégalités

$$\alpha > \beta > \alpha'$$

par α supposé positif, il vient

$$1 > \frac{\beta}{\alpha} > \frac{\alpha}{\alpha'}$$

et, comme $\alpha' : \alpha$ est supposé tendre vers l'unité, il suit du principe IV (nº 18) que $\beta : \alpha$ tend vers l'unité. La même démonstration s'applique au rapport $\beta : \alpha'$.

II. *La limite d'une somme d'infiniment petits de même signe* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$, *dont le nombre n augmente indéfiniment, n'est pas changée quand on remplace ces infiniment petits par d'autres* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, *pourvu que les rapports* $\beta_i : \alpha_i$ *tendent uniformément vers l'unité.*

Le mot *uniformément* doit être entendu en ce sens que, quelque petit que soit ε positif, on peut prendre n assez grand pour qu'on ait, quel que soit l'indice i,

$$1 - \varepsilon < \frac{\beta_i}{\alpha_i} < 1 + \varepsilon.$$

S'il en est ainsi, on aura, en supposant les α positifs,

$$(1 - \varepsilon)\,\alpha_i < \beta_i < (1 + \varepsilon)\,\alpha_i\,;$$

puis, en additionnant toutes les inégalités semblables,

$$(1 - \varepsilon)\,\Sigma\alpha_i < \Sigma\beta_i < (1 + \varepsilon)\,\Sigma\alpha_i$$

et, par conséquent,

$$1 - \varepsilon < \frac{\Sigma\beta_i}{\Sigma\alpha_i} < 1 + \varepsilon.$$

D'ailleurs, ε étant aussi petit qu'on le veut avec $\frac{1}{n}$, on en conclut

$$\lim \frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n} = 1,$$

ce qui exige que $\beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots \beta_n$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n$ aient la même limite finie, nulle ou infinie.

Ces deux principes généraux peuvent revêtir un autre énoncé moyennant la remarque suivante :

Quand deux infiniment petits α et α' ont pour limite de leur rapport l'unité, leur différence δ est infiniment petite par rapport à chacun d'eux, et réciproquement.

En effet, l'équation $\delta = \alpha - \alpha'$ peut s'écrire

$$\frac{\delta}{\alpha'} = \frac{\alpha}{\alpha'} - 1.$$

Le second membre ayant pour limite zéro, il en est de même

du premier et δ est infiniment petit par rapport à α'. Réciproquement, si δ est infiniment petit par rapport à α', $\delta : \alpha'$ tend vers zéro, et, par conséquent, $\alpha : \alpha'$ tend vers l'unité,

Les principes de substitution peuvent donc aussi s'énoncer comme il suit :

On peut, sans changer la limite d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petits, négliger dans chaque terme une quantité infiniment petite par rapport à lui.

Toutefois l'énoncé de ce principe doit être complété, dans le cas d'une somme, par la condition contenue sous le mot *uniformément* dans l'énoncé primitif.

L'utilité de ces principes consiste en ce qu'ils permettent de négliger dans bien des cas précisément les parties des infiniment petits qui font la difficulté du problème.

§ 3. Des fonctions d'une variable réelle.

22. Fonctions d'une variable. — Etant données deux variables x et y, on dit qu'elles sont fonctions l'une de l'autre dans le sens le plus général, s'il existe une dépendance quelconque entre les valeurs que l'on peut attribuer à ces deux variables. En général, on considère une des deux variables comme *indépendante,* par exemple x. La valeur de x peut être choisie à volonté, mais, x étant donnée, y n'est plus arbitraire. On dit alors que y est fonction de x et cette dépendance s'exprime par la notation

$$y = f(x).$$

On étudie dans les éléments des mathématiques un certain nombre de fonctions relativement simples, dont les propriétés sont bien connues et que l'on représente par des symboles particuliers. Ce sont les *fonctions élémentaires* :

$$x^m, \ A^x, \ \sin x, \text{ etc.}$$

On dit que la fonction $f(x)$ est *uniforme,* ou *univoque,* ou *à détermination simple,* si elle n'est susceptible que d'une seule valeur pour chaque valeur de x, telles sont A^x, $\sin x$,... Au contraire, la fonction est *multiforme,* ou *plurivoque,* ou *à déterminations multiples,* si elle est susceptible de plusieurs valeurs pour chaque valeur de x. Telle est la fonction $\sqrt{x}$ qui peut recevoir deux valeurs de signes contraires pour chaque valeur de x.

On classe les fonctions en fonctions *explicites* ou *implicites* suivant que la relation entre y et x est donnée par une équation résolue par rapport à la fonction y ou non résolue par rapport à cette fonction ; en fonctions *algébriques* ou *transcendantes* suivant que la relation entre y et x peut ou ne peut pas être exprimée par une équation dont les deux membres sont des polynomes entiers en x et en y, Les fonctions algébriques se partagent elles-mêmes en *rationnelles* ou *irrationnelles*, suivant que l'équation qui lie y à x est du premier degré par rapport à y ou ne l'est pas. Une fonction rationnelle s'exprime donc par le quotient de deux polynomes en x ; en particulier, si elle se réduit à un polynome, on dit qu'elle est *rationnelle* et *entière*.

Lorsque la relation $y = f(x)$ qui lie y à x peut être résolue par rapport à x, de telle sorte qu'on en tire $x = \varphi(y)$, la fonction $\varphi(y)$ s'appelle la *fonction inverse* de $f(x)$. C'est ainsi que les fonctions x^m, A^x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$,... ont respectivement pour inverses $x^{\frac{1}{m}}$, $\operatorname{Log} x$, $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, etc.

La variation d'une fonction se représente géométriquement en utilisant les principes de la géométrie analytique. On trace généralement deux axes rectangulaires OX et OY, par rapport auxquels on détermine les coordonnées x et y d'un point. L'équation $y = f(x)$ sera généralement celle d'une courbe plane, que l'on considère comme une représentation géométrique de la fonction $f(x)$.

Remarque. — Il arrive souvent que l'on est amené à considérer une constante ou bien la variable indépendante elle-même comme des cas particuliers d'une fonction. Il n'y a là rien qui doive surprendre, car ces cas particuliers se rencontrent déjà dans les fonctions élémentaires et ce sont même les plus simples. Ainsi, la fonction x^m se réduit à 1 pour $m = 0$ et à x pour $m = 1$. Dans la représentation géométrique correspondante, la courbe se réduit à une droite, parallèle à l'axe des x ou bissectrice de l'angle des axes.

23. Oscillation d'une fonction dans un intervalle. — Si la fonction $f(x)$ est bornée dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire quand x varie dans (a, b), elle a, comme on le sait (13), une *borne inféaéée*

rieure m et une *borne supérieure* M. La différence $M - m$ entre les bornes supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) s'appelle l'*oscillation* de la fonction dans cet intervalle. Si la fonction n'est pas bornée dans l'intervalle (a, b), on dit que son oscillation est *infinie* dans cet intervalle.

Suivant ces définitions, si l'oscillation de $f(x)$ est finie et égale à $M - m$ dans l'intervalle (a, b) et que l'on partage cet intervalle en plusieurs autres consécutifs par des points intermédiaires : 1° la borne supérieure de la fonction sera encore M dans un au moins des intervalles partiels et ne pourra surpasser M dans aucun ; 2° la borne inférieure sera m dans un au moins des intervalles partiels et ne sera inférieure à m dans aucun ; 3° la somme des oscillations dans les intervalles partiels sera au moins égale à $M - m$ et l'oscillation ne sera supérieure à $M - m$ dans aucun de ces intervalles. Enfin, si l'oscillation de $f(x)$ est infinie dans l'intervalle (a, b), elle le sera encore dans un au moins des intervalles partiels.

24. Oscillation en un point. Définitions relatives à la continuité. — Si la fonction $f(x)$ n'est bornée dans l'intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ pour aucune valeur positive si petite qu'elle soit de δ, on dit que l'*oscillation de* $f(x)$ *est infinie au point* a. Sinon l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle $(a - \delta, a + \delta)$, qui est constante ou décroissante quand δ diminue, tend vers une limite déterminée quand δ tend vers 0. Cette limite est l'*oscillation de* $f(x)$ *au point* a.

Si l'oscillation est nulle en ce point, la fonction est *continue au point* a, *ou pour* $x = a$. — *La fonction* $f(x)$ *est donc continue au point* a, *si* $f(x)$ *a pour limite* $f(a)$ *quand* x *tend vers* a *d'une manière quelconque.*

L'oscillation définie ci-dessus est l'*oscillation totale* au point a, par opposition avec les *oscillations à gauche* et *à droite* du point a qui se définissent comme la première, mais en considérant les limites des oscillations dans les deux intervalles $(a - \delta, a)$ et $(a, a + \delta)$. D'après ces définitions, toutes les oscillations sont des quantités essentiellement positives ou nulles.

La fonction $f(x)$ *est continue à droite du point* a si son oscillation est nulle à droite du point a. Elle est *continue à gauche*

du point a si son oscillation est nulle à gauche du point a. Si les deux oscillations sont nulles, la fonction est continue au point a.

La fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) si elle est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, à droite du point a et à gauche du point b.

Elle est *continue dans le voisinage du point a*, si elle l'est dans l'intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ à partir d'une valeur positive suffisamment petite de ε.

Si la fonction $f(x)$ n'est pas continue pour $x = a$ ou dans l'intervalle (a, b), elle est *discontinue au point a* ou *dans l'intervalle* (a, b). — Si elle est discontinue au point a, celui-ci est un *point de discontinuité.*

25. Continuité des fonctions composées. — I. *La somme, le produit le quotient de deux fonctions continues au point a ou dans l'intervalle (a, b), sont des fonctions continues en ce point ou dans cet intervalle, à moins qu'une fonction prise comme diviseur ne s'annule.*

Ces théorèmes résultent immédiatement des principes correspondants de la théorie des limites (n° 18). Démontrons, par exemple, le dernier. Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions continues au point a ; si $F(a)$ n'est pas nul et si x tend vers a, la limite du quotient $f(x) : F(x)$ sera égale au quotient des limites $f(a) : F(a)$. Donc $f(x)$ est continue au point a. En second lieu, si $f(x)$ et $F(x)$ sont continues dans l'intervalle (a, b) et que $F(x)$ ne s'annule pas dans cet intervalle, le quotient $f(x) : F(x)$ sera continu pour toutes les valeurs de x, donc dans l'intervalle (a, b).

II. *Soient $u = f(x)$ et $y = F(u)$; si $f(x)$ est continue pour $x = a$ et $F(u)$ continue pour $u = f(a)$, y sera fonction continue de x au point de a.*

On a, en effet, x tendant vers a,

$$\lim F[f(x) = F[\lim f(x)] = F[f(a)].$$

Nous concluons de là que *les fonctions composées* par addition, multiplication, division ou superposition du signe fonctionnel ne peuvent être discontinues que si l'une des fonctions composantes est discontinue ou si l'une des fonctions prises comme diviseur s'annule.

26. Théorème. — *Soit* ε *un nombre positif ; s'il est impossible, en intercalant un nombre convenable de points de subdivision entre* a *et* b, *de partager l'intervalle* (a, b) *en intervalles consécutifs, de telle sorte que l'oscillation de* $f(x)$ *soit* $< \varepsilon$ *dans chacune de ces parties consécutives, il existe dans l'intervalle* (a, b) *un point au moins où l'oscillation de* $f(x)$ *est* $\geqslant \varepsilon$. *Ce point peut être* a *ou* b, *mais c'est alors l'oscillation à droite du point* a *ou celle à gauche du point* b *qui sera* $\geqslant \varepsilon$.

Admettons que l'impossibilité supposée dans cet énoncé ait lieu pour l'intervalle (a, b) et partageons cet intervalle en deux autres par son point milieu. L'impossibilité subsistera dans l'une au moins de ces deux parties, sinon elle n'existerait pas dans l'intervalle total. Soit (a_1, b_1) celle des deux moitiés dans laquelle l'impossibilité subsiste, ou l'une quelconque des deux moitiés si l'impossibilité subsiste dans toutes les deux. Partageons de même (a_1, b_1) en deux parties égales et désignons par (a_2, b_2) l'une des deux moitiés dans laquelle l'impossibilité subsiste encore. Partageons (a_2, b_2) en parties égales et continuons ainsi de suite. Nous formerons deux suites de nombres $a_1, a_2, .. a_n, ..$ et $b_1, b_2, .. b_n, ..$ l'une stationnaire ou croissante, l'autre stationnaire ou décroissante, et tendant vers la même limite c, puisque $b_n - a_n = (b - a) : 2^n$ a pour limite 0. Le point c appartient donc à un intervalle (a_n, b_n) aussi petit que l'on veut et intérieur à (a, b) dans lequel l'oscillation de $f(x)$ est $\geqslant \varepsilon$. Donc l'oscillation au point c est $\geqslant \varepsilon$. Enfin, si c coïncide avec a ou avec b, l'oscillation se détermine en ne tenant compte que des valeurs de $f(x)$ à droite de a ou à gauche de b, ce qui achève la démonstration du théorème.

27. Propriétés des fonctions continues d'une variable. — I. *Si la fonction* $f(x)$ *est continue au point* a *et ne s'annule pas en ce point, elle sera de même signe que* $f(a)$ *dans l'intervalle* $(a - \delta, a + \delta)$, *pourvu qu'on choisisse* δ *suffisamment petit.*

En effet, $f(x)$ ayant pour limite $f(a)$ quand x tend vers a, on peut choisir δ assez petit pour que $f(x)$ soit plus rapproché de $f(a)$ que ne l'est 0, sous la condition $| x - a | < \delta$. Cela fait, $f(x)$ aura le signe de $f(a)$ dans l'intervalle $(a - \delta, a + \delta)$.

II. *Si* $f(x)$ *est continue dans l'intervalle* (a, b), *elle est bornée supérieurement et inférieurement dans cet intervalle.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de celui du n° 26. Puisque $f(x)$ n'a pas de discontinuité dans l'intervalle (a, b), on peut, le nombre positif ε étant donné, trouver un mode de division de cet intervalle en parties telles que l'oscillation de $f(x)$ soit $\leqslant \varepsilon$ dans chacune d'elles. Soit n le nombre de ces parties ; la fonction $f(x)$ restera comprise entre $f(a) - n\varepsilon$ et $f(a) + n\varepsilon$.

III. *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), ses bornes supérieure et inférieure sont toujours accessibles, c'est-à-dire qu'il existe toujours au moins deux vateurs de x dans l'intervalle (a, b) qui donnent respectivement à $f(x)$ ses plus grande et plus petite valeurs* M *et* m (Weierstrass).

Faisons la démonstration pour la borne M. A cet effet, considérons la fonction continue, non négative, $M - f(x)$. Cette fonction peut décroître en dessous de tout nombre positif ε, puisque $f(x)$ peut surpasser tout nombre inférieur à M. Donc la fonction $1 : [M - f(x)]$ peut surpasser tout nombre assignable et elle n'est pas bornée dans l'intervalle (a, b). Par conséquent, cette nouvelle fonction est discontinue (II), ce qui n'a lieu (n° 25) que si $M - f(x)$ s'annule dans l'intervalle (a, b).

IV. *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et qu'on divise cet intervalle en intervalles partiels consécutifs, à tout nombre positif 2ε, si petit qu'il soit, correspond un nombre δ tel que l'oscillation de $f(x)$ dans chaque intervalle partiel soit inférieure à 2ε, pourvu que l'amplitude de chaque intervalle partiel soit inférieure à δ.* (Cantor).

En effet, on peut trouver un premier mode de décomposition, tel que l'oscillation de $f(x)$ soit inférieure à ε dans chaque intervalle partiel, sinon la fonction aurait une oscillation $> \varepsilon$ en un point de l'intervalle (a, b) et ne serait pas continue (n° 26). Soit δ l'étendue du plus petit de ces intervalles. Si l'on considère un autre mode de subdivision en intervalles $< \delta$, un intervalle de ce second mode de subdivision ne pourra empiéter sur plus de deux intervalles du premier mode. Donc l'oscillation de la fonction dans cet intervalle ne supassera pas la somme des oscillations de $f(x)$ dans deux intervalles du premier mode. Elle restera, par conséquent, inférieure à $\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

On énonce souvent ce théorème en disant qu'une fonction continue dans un intervalle (a, b) l'est *uniformément* dans cet intervalle.

V. *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, $f(x)$ s'annule pour une valeur ξ de x comprise entre a et b.*

Marquons entre a et b une suite de points consécutifs assez rapprochés pour que la variation de $f(x)$ soit $< \varepsilon$ d'un point au suivant, ce qui est possible quelque petit que soit ε (IV). Si la fonction ne s'annule pas en l'un de ces points, elle change de signe entre deux points consécutifs où sa valeur absolue sera $< \varepsilon$. Donc $1 : f(x)$ surpasse $1 : \varepsilon$ en valeur absolue quelque petit que soit ε, et cette fonction n'est pas bornée ni continue, ce qui n'a lieu (25) que si $f(x)$ s'annule dans l'intervalle (a, b).

VI. *Si la fonction $f(x)$ est continue dans (a, b), elle prend, dans cet intervalle, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.*

En effet, soit A une quantité comprise entre ces deux valeurs ; la fonction continue $f(x) - A$, prenant des valeurs de signes contraires pour $x = a$ et $x = b$, s'annule en un point intermédiaire ξ et l'on a, par conséquent, $f(\xi) = A$.

On énonce cette propriété en disant qu'une fonction continue dans un intervalle (a, b) ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

Exercices.

1. Soit x une valeur positive et $[x]$ le plus grand entier contenu dans x. On considère la fonction $x - [x]$. Prouver : 1°) qu'elle est discontinue pour les valeurs entières de x et continue pour les autres valeurs ; 2°) que sa borne inférieure est 0 et sa borne supérieure 1, dans tout intervalle comprenant un nombre entier ; 3°) que cette borne inférieure est *accessible* et cette borne supérieure *inaccessible*.

2. La fonction $\sin \frac{1}{x}$ est définie, sauf pour $x = 0$; on lui donne, pour compléter sa définition, la valeur 0 pour $x = 0$. Prouver : 1°) que cette fonction est discontinue pour $x = 0$ et que son oscillation en chaque point est égale à 2 ; 2°) que cependant, dans tout intervalle comprenant le point 0, la fonction ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

3. On définit la fonction $\varphi(x)$ en posant $\varphi(x) = \frac{1}{q}$ quand x est

rationnel et égal à une fraction irréductible $\pm p : q$ et $\varphi(x) = 0$ quand x est *irrationnel*. Prouver : 1°) que $\varphi(x)$ est continue pour toute valeur irrationnelle de x ; 2°) discontinue pour toute valeur rationnelle ; 3°) que l'oscillation est égale à la fonction elle-même.

Cet exemple prouve qu'il existe des fonctions telles qu'il y ait, dans tout intervalle si petit qu'il soit, une infinité de points où elles sont continues et une infinité d'autres où elles sont discontinues.

4. On peut définir la continuité en un point et dans un intervalle (a, b) comme au n° 24, mais en ne donnant à la variable indépendante x que des valeurs rationnelles. Ceci posé, soit $f(x)$ une fonction définie pour les valeurs rationnelles de x seulement, et continue pour toutes ces valeurs dans l'intervalle (a, b). Existe-t-il une fonction $F(x)$, continue pour toutes les valeurs réelles de x dans l'intervalle (a, b) et qui coïncide avec $f(x)$ pour x rationnel ?

R. Oui, si la continuité de $f(x)$ est uniforme [c'est à dire si la propriété IV du n° 27 s'applique à $f(x)$] ; non dans le cas contraire. On le prouvera en montrant que, dans le cas de l'affirmative, $f(x)$ tend vers une limite déterminée $F(\alpha)$ quand x tend vers une valeur irrationnelle α.

§. 4. Fonctions de plusieurs variables réelles.

28. Des variables, des fonctions et de leurs limites. — Si les valeurs que reçoit la variable u dépendent des valeurs qu'on attribue à plusieurs autres variables $x, y,\ldots$ on dit que u est une fonction de ces variables et l'on écrit $u = f(x, y,\ldots)$. La fonction est *uniforme,* ou *univoque,* ou *à détermination simple,*—*multiforme,* ou *plurivoque,* ou *à déterminations multiples,* selon qu'elle est susceptible d'une seule ou bien de plusieurs valeurs pour chaque système de valeurs de $x, y,\ldots$ La fonction est *algébrique* ou *transcendante, rationnelle* ou *irrationnelle, implicite* ou *explicite* comme dans le cas des fonctions d'une seule variable.

On dit que les variables $x, y,\ldots$ varient dans le *domaine* rectangulaire D limité par les valeurs a_1 et a_2 de x, b_1 et b_2 de $y,\ldots$ lorsqu'on peut donner à $x, y,\ldots$ respectivement toutes les valeurs comprises entre ces limites et, de plus, ces valeurs-limites elles-mêmes. Les points où l'une des variables au moins prend une de ses valeurs-limites forment la *frontière* du domaine D. Les autres points sont *intérieurs* au domaine D.

Plus généralement, les variables $x, y,\ldots$ peuvent prendre tous les systèmes de valeurs qui satisfont à certaines inégalités de la forme $F(x, y,\ldots) \geqslant 0$ où F est continue. On dit encore,

dans ce cas, qu'elles varient dans un *domaine* D, défini par ces conditions. Sur la *frontière* du domaine une des inégalités se change en égalité.

Lorsque les variables $(x, y, ...)$ varient dans un domaine D, la fonction $f(x, y, ...)$ peut être bornée supérieurement et inférieurement. Dans ce cas, ses *bornes supérieure et inférieure* et son *oscillation* se définissent comme dans le cas des fonctions d'une seule variable.

Ce que nous avons dit (n° 22) de ces divers éléments, dans le cas où l'on considère le partage d'un intervalle en plusieurs autres, peut évidemment se répéter si l'on considère le partage en plusieurs autres d'un domaine D.

29. Représentation géométrique. — Quand on considère deux variables x et y seulement, leur variation simultanée se représente géométriquement par le déplacement d'un point M du plan qui a pour coordonnées rectangulaires x et y. Le domaine D limité par les valeurs a_1 et a_2 de x, b_1 et b_2 de y est alors figuré par le rectangle dont les côtés ont pour équations $x = a_1$, $x = a_2$ et $y = b_1$, $y = b_2$. Quand x et y varient dans ce domaine, le point représentatif du système peut prendre toutes les positions comprises dans l'intérieur et sur le contour du rectangle. Par allusion à cette représentation, un système de valeurs de x et y s'appelle un point, le système a, b le point (a, b), etc. La représentation géométrique s'étend au cas de trois variables à condition de considérer le déplacement du point M dans l'espace. Dans ce cas, un domaine rectangulaire est figuré par un prisme rectangle.

Plus généralement, dans le cas de deux variables, on peut faire varier le point x, y dans la portion du plan limité par un contour fermé. Le domaine D comprend alors tous les points de la courbe *frontière* et de la région *intérieure*.

Dans le cas de trois variables, le point x, y, z peut varier dans un domaine D limité par une surface fermée. Cette surface est la *frontière* du domaine.

Au delà, la représentation géométrique fait défaut, mais il est commode d'étendre la terminologie au cas général, le point variant alors dans l'*hyperespace*.

30. Définitions relatives à la continuité. — *Une fonction $f(x, y,...)$ est continue au point $(a, b,...)$ si $f(x, y,...)$ a pour limite $f(a, b,...)$ quand x, y,... tendent respectivement vers a, b... d'une manière quelconque, c'est-à-dire quand $|x - a| + |y - b| + ...$ tend vers 0 ; ou, ce qui revient encore au même, si l'oscillation de $f(x, y,...)$ dans le domaine infiniment petit limité par les valeurs $a \pm \varepsilon$ de x, $b \pm \eta$ de y,... a pour limite 0 quand ε, η,... tendent vers 0.*

La fonction $f(x, y,...)$ est continue dans un domaine D si elle est continue en tout point intérieur à ce domaine et en tout point de sa frontière. Seulement, sur la frontière du domaine D, la condition de continuité, exprimée par l'équation

$$\lim f(x, y,...) = f(\lim x, \lim y,...),$$

est seulement relative au cas où les variables tendent vers leurs limites sans sortir du domaine D.

La fonction *est continue dans le voisinage d'un point* $(a, b,...)$ lorsqu'elle est continue dans un domaine suffisamment petit comprenant ce point *dans son intérieur* (au sens étroit).

Lorsqu'une fonction n'est pas continue au point $(a, b,...)$, elle est *discontinue* en ce point.

D'après ces définitions, une fonction peut être continue par rapport à chaque variable x, y,... variant seule, sans l'être par rapport à l'ensemble de ces variables.

31. Continuité des fonctions composées. — I. *La somme, le produit, le quotient de deux fonctions continues sont des fonctions continues, sauf si une fonction prise comme diviseur s'annule.*

La démonstration est la même que pour les fonctions d'une seule variable (n° 25).

II. *Si u, v..., sont des fonctions continues de x, y..., et si $F(u, v,...)$ est une fonction continue de u, v,..., F sera aussi fonction continue de x, y....*

Faisons tendre x, y,... vers x_0, y_0,... et soient u_0, v_0,... les valeurs de u, v,... en ce point. Les fonctions étant continues, on aura effectivement :

$$\lim F(u, v,...) = F(\lim u, \lim v,...) = F(u_0, v_0,...).$$

De là, nous concluons encore que les fonctions composées de plusieurs variables ne peuvent devenir discontinues que si l'une

des fonctions composantes devient discontinue ou si l'on doit faire une division par zéro. Ce résultat généralise celui obtenu au n° 25 et le renferme comme cas particulier.

32. Convergence uniforme. — Soit $f(x, y, z, \ldots)$ une fonction de plusieurs variables. Il se peut qu'elle tende vers une limite déterminée $\varphi(y, z, \ldots)$ quand on fait tendre x vers une valeur particulière a. On dit que $f(x, y, z, \ldots)$ *converge uniformément vers sa limite* dans un domaine déterminé $y, z, \ldots$ si, à tout nombre positif ε, correspond un nombre δ, INDÉPENDANT DE y, $z, \ldots$, tel qu'on ait

$$(1) \qquad |\, f(x, y, z, \ldots) - \varphi(y, z, \ldots) \,| < \varepsilon,$$

sous la seule condition $|\, x - a \,| < \delta$, et cela dans tout le domaine $y, z, \ldots$ considéré.

La fonction $f(x, y, z, \ldots)$ peut aussi converger vers une limite $\varphi(y, z, \ldots)$ quand x tend vers l'infini. Pour que la convergence soit *uniforme*, il faut qu'à tout nombre ε corresponde un nombre N INDÉPENDANT DE $y, z, \ldots$, tel que la relation (1) ait lieu sous la seule condition $x > N$ dans tout le domaine $y, z, \ldots$ considéré.

Ainsi, par exemple, la fonction

$$\frac{1}{x - y},$$

a pour limite 0 quand x tend vers l'infini, et cela pour chaque valeur de y, mais la convergence n'est pas uniforme si y peut varier d'une manière quelconque, car, quelque grand que soit x, on peut encore choisir y de manière à rendre la fonction aussi grande qu'on veut.

§ 5. Fonctions élémentaires *.

33. Exposants fractionnaires. — Dans sa signification primitive, un exposant indique le nombre des facteurs égaux d'un produit :

(*) Les définitions des fonctions exponentielle et logarithme appartiennent aux éléments de l'algèbre. Ces définitions et les propriétés fondamentales de ces fonctions sont déjà familières à ceux qui abordent l'étude de l'analyse infinitésimale. En les rappelant brièvement ci-dessous, notre but est de les rattacher aux principes généraux et de faire saisir dans son ensemble la chaine des déductions qui y conduisent.

x^n désigne le produit de m facteurs égaux à x. On généralise déjà en algèbre élémentaire la notion des exposants par la définition des exposants fractionnaires et négatifs. Si a désigne un nombre positif quelconque, l'équation $x^n = a$, où n est un entier positif, a une racine positive et une seule que l'on appelle la *racine arithmétique* n^{ieme} de a. On la représente par $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$. On pose ensuite, par définition, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $x^0 = 1$, $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$, α désignant une fraction quelconque. Ces définitions suffisent pour établir, sans aucune difficulté, toutes les règles du calcul des exposants rationnels positifs et négatifs. Nous supposerons ces résultats acquis dans les éléments.

34. Fonction exponentielle. — Soit a un nombre positif, la définition de la fonction a^x résulte de celle des exposants fractionnaires pour toutes les valeurs rationnelles de x. Lorsque x varie *sans cesser d'être rationnel*, la fonction a^x est continue pour chaque valeur de x et elle varie en croissant de 0 à 1 et de 1 à ∞ quand x lui-même varie dans le même sens de $-\infty$ à 0 et de 0 à ∞. Cette propriété permet de définir, par un passage à la limite, la fonction a^x pour les valeurs irrationnelles de x et de donner, par conséquent, la *définition des exposants irrationnels*. Si α est irrationnel, a^α est la limite de a^x quand x tend vers α sans cesser d'être rationnel. La fonction a^x se trouve maintenant définie pour toutes les valeurs réelles de x, elle est encore constamment croissante avec x et continue pour toutes les valeurs de cette variable.

Les propriétés essentielles de la fonction exponentielle sont exprimées par les équations

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad (a^{xm}) = a^{mx}.$$

Celles-ci se démontrent directement dans le cas des exposants fractionnaires et elles s'étendent, par un passage à la limite, au cas des exposants irrationnels. Nous supposerons encore ces résultats acquis dans les éléments.

35. Fonction logarithme. Puissance quelconque. — Soit a un nombre > 1 ; le *logarithme* d'un nombre positif m, dans le système de logarithmes dont la base est a, est l'exposant auquel il faut

élever a pour reproduire m. Tout nombre positif m a un logarithme et un seul dans la base a, car, a^x croissant de 0 à ∞ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, l'équation $a^x = m$ a une racine et une seule. Nous représenterons cette racine par $\mathrm{Log}_a x$.

La fonction $\mathrm{Log}_a x$ est définie par là pour toutes les valeurs réelles et positives de x sauf $x = 0$; elle croît successivement de $-\infty$ à 0, de 0 à 1 et de 1 à l'infini, quand x lui-même croît de 0 à 1 de 1 à a et de a à l'infini. Elle est continue pour toutes les valeurs de x sauf $x = 0$.

Les propriétés fondamentales du logarithme correspondent à celles de l'exponentielle a^x, elles sont exprimées par les équations :

$$\mathrm{Log}_a x + \mathrm{Log}_a y = \mathrm{Log}_a xy, \qquad \mathrm{Log}_a x^m = m \,\mathrm{Log}_a x.$$

Lorsque la variable x est positive, une *puissance*, x^a, est définie par ce qui précède pour toutes les valeurs réelles de a. On a, en effet, le logarithme étant pris dans la base A,

$$x^a = [\mathrm{A}^{\mathrm{Log}\, x}]^a = \mathrm{A}^{a\, \mathrm{Log}\, x}.$$

Cette fonction s'exprime donc par les fonctions exponentielle et logarithme. Elle est continue pour toutes les valeurs positives de x.

36. Logarithmes naturels. Nombre e. — Les logarithmes naturels sont ceux qui ont pour base le nombre e que nous allons définir. Comme on le verra, ce sont ceux qui se présentent le plus naturellement dans le calcul différentiel et nous n'en aurons guère d'autre à considérer. Nous conviendrons de désigner par $\mathrm{Log}_{\mathrm{A}}\, x$ le logarithme de x dans la base A, et par $\mathrm{Log}\, x$ (sans indice) son logarithme naturel.

On définit d'abord le nombre e comme limite de l'expression

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

quand n est un entier qui tend vers l'infini, et cette limite est finie et déterminée, car nous allons montrer que cette expression est *croissante* et *bornée*.

Elle est croissante, car elle se développe par la formule du binome dans une somme de $n + 1$ termes :

$$1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}\frac{1}{n^p} + \dots$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots$$
$$+ \frac{1}{1.2\dots p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{n}\right) + \dots$$

Or le nombre des termes augmente avec n et chaque terme aussi.

Ensuite l'expression est bornée, car le terme de rang $(p+1)$ (écrit en dernier lieu) est moindre que

$$\frac{1}{1.2\dots p} < \frac{1}{2^{p-1}},$$

et la somme entière, moindre que

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} < 3.$$

Donc le nombre e est compris entre 2 et 3. Nous apprendrons plus tard le moyen de le calculer. Sa valeur approchée est

$$e = 2{,}7\,1828\,1828\,459045\dots$$

Théorème. — *Plus généralement, α tendant vers 0 d'une manière quelconque, on a*

$$\lim_{\alpha=0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

En effet, si α est positif, $1:\alpha$ est compris entre deux entiers consécutifs n et $n+1$ qui augmentent à l'infini, et l'on a

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Donc $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est compris entre deux quantités qui ont pour limite e :

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n . \left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Si α est négatif et > -1, on pose $1+\alpha = 1:(1+\beta)$, de sorte que β tend vers 0 en restant positif, et l'on a

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}} = (1+\beta).(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}},$$

ce qui ramène au cas précédent.

37. Fonctions circulaires directes. — Les fonctions trigonométriques sont définies dans les éléments par des considérations géométriques. Nous supposerons connues leurs propriétés les plus élémentaires.

Toutes les fonctions trigonométriques peuvent se définir au moyen de l'une d'elles, considérée comme fondamentale, par exemple $\sin x$, au moyen des formules :

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Dans toute l'étendue de ce cours, les angles sont supposés mesurés par la longueur de l'arc qu'ils interceptent sur la circonférence de rayon *un*. Dans les formules précédentes, x désigne donc un arc de cercle.

38. Fonctions circulaires inverses. — Les fonctions circulaires étant périodiques, reprennent la même valeur pour une infinité de valeurs de la variable. Donc leurs inverses, ayant une infinité de valeurs pour chaque valeur de la variable, sont des fonctions à déterminations multiples. Nous allons montrer toutefois que l'on peut associer ces valeurs entre elles, de manière à définir une infinité de fonctions distinctes, dont chacune sera uniforme et continue et constituera une *branche* de la fonction.

1° La fonction $y = \operatorname{arc} \sin x$ est la fonction inverse du sinus, c'est la fonction implicite y définie par l'équation

$$x = \sin y.$$

Quand y croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, x passe une seule fois par chacune des valeurs comprises entre -1 $+1$. Donc, à chaque valeur de x dans l'intervalle $(-1, +1)$, ne correspond qu'une seule valeur de y dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Nous dirons que cette valeur est la *valeur principale* de $\operatorname{arc} \sin x$.

La valeur principale de $\operatorname{arc} \sin x$ varie d'une manière continue avec x et elle croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ quand x croît de -1 à $+1$; elle définit la *branche principale* de la fonction et nous considérerons celle-là chaque fois que le contraire ne sera pas dit expressément.

La fonction arc sin x a une infinité d'autres branches. Mais il est facile de les ramener à la principale. En effet, les seules valeurs qui laissent sin y invariable s'obtiennent en changeant y en $\pi - y$ ou en ajoutant à ces deux arcs un nombre k entier (positif ou négatif) de circonférences. Donc toutes les autres valeurs de l'arc sinus s'expriment au moyen de la principale par les deux formules :

$$y = \text{arc sin } x + 2k\pi, \qquad y = (\pi - \text{arc sin } x) + 2k\pi,$$

où l'on donne à arc sin x sa valeur principale. En même temps, chacune de ces formules définit, pour chaque valeur de k, une branche distincte de la fonction.

La fonction arc sin x n'a de sens jusqu'ici que si x est compris dans l'intervalle $(-1, +1)$; en dehors de cet intervalle, l'expression arc sin x ne représente plus rien.

2° La fonction $y =$ arc cos x se ramène à la précédente par les relations :

$$x = \cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right),$$

$$\frac{\pi}{2} - y = \text{arc sin } x,$$

$$\text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sin } x.$$

La *valeur principale* de arc cos x s'obtient par cette formule en donnant la sienne à arc sin x. C'est une fonction uniforme et continue de x, qui varie de π à 0 quand x varie de -1 à $+1$, et c'est la *branche principale* de la fonction. Les autres branches s'obtiennent en fonction de la principale par les formules :

$$y = 2k\pi + \text{arc cos } x, \qquad y = 2k\pi - \text{arc cos } x.$$

Comme l'arc sinus, l'arc cosinus n'a de sens que si la variable est comprise dans l'intervalle $(-1, +1)$.

3° La fonction $y =$ arc tg x a, pour chaque valeur de x, une valeur et une seule satisfaisant aux conditions :

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arc tg } x < \frac{\pi}{2}.$$

C'est sa *valeur principale*, qui définit la branche principale de la fonction. Elle croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ quand x croît de $-\infty$ à

$+\infty$. Les valeurs de l'arc pour lesquelles la tangente reprend la même valeur diffèrent entre elles d'un multiple de π ; donc les autres branches de la fonction arc tg x s'expriment, au moyen de la première, par la seule formule

$$y = \text{arc tg } x + k\pi.$$

4° Les autres fonctions inverses se ramènent aux précédentes par les formules, correspondant aux trois dernières du n° 37 :

$$\text{arc cot } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } x,$$

$$\text{arc sec } x = \text{arc cos } \frac{1}{x},$$

$$\text{arc cosec } x = \text{arc sin } \frac{1}{x}.$$

Exercices.

1. *Toute fonction $f(x)$ qui reste bornée dans l'intervalle* $(0, \varepsilon)$ *et qui satisfait, pour toutes valeurs réelles de x et de y, à la relation*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

est de la forme $f(x) = ax$, a constant (ε peut être aussi petit qu'on veut).

En raisonnant de proche en proche, on déduit d'abord de la relation donnée que l'on a , m et n étant des entiers quelconques,

$$f(mx + n) = mf(x) + nf(1).$$

Prenons $m > 1 : \varepsilon$; faisons varier x d'une manière quelconque dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{m}\right)$ et faisons tendre l'entier n vers l'infini. La variable $mx + n = \xi$ tendra vers l'infini d'une manière arbitraire et l'on déduira de l'équation précédente, puisque $f(x)$ reste bornée par hypothèse,

$$\lim_{\xi = \infty} \frac{f(\xi)}{\xi} = \lim \frac{mf(x) + nf(1)}{mx + n} = f(1) = a.$$

Prenons ensuite $n = 0$ et faisons tendre m vers l'infini ; on déduira de la même équation, en tenant compte du résultat précédent,

$$\frac{f(x)}{x} = \lim_{m = \infty} \frac{f(mx)}{mx} = f(1) = a.$$

2. *La seule fonction qui reste bornée dans l'intervalle* $(0, \varepsilon)$, *qui n'est pas constamment nulle et qui satisfait pour toute valeur de x à l'égalité*

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

est la fonction $f(x) = A^x$, A constant. (Quelque petit que soit ε).

On déduit d'abord de cette relation $f(2x) = f(x)^2$, $f(\varepsilon) = f(x) f(\varepsilon - x)$; donc : 1° $f(x)$ est toujours positif ; 2° si $f(\varepsilon)$ n'est pas nul, la limite inférieure de $f(x)$ est > 0 dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$.

On posera donc $\text{Log} f(x) = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ sera borné dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$ et on appliquera la propriété de l'exercice précédent.

On remarquera : 1° que, dans ces théorèmes, on ne postule pas la continuité de la fonction ; 2° que, si l'on ne considérait que les valeurs rationnelles de x, il serait inutile de supposer d'avance $f(x)$ borné.

§ 6. Nombres complexes.

39. Notation du nombre complexe. — On donne le nom de *nombre complexe* ou *imaginaire* à l'ensemble de deux nombres réels a et b, rangés dans un certain ordre, et l'on représente et ensemble par la notation

$$a + bi.$$

Les expressions de cette forme sont soumises à des règles de calcul conventionnelles. C'est dans l'énoncé de ces règles que consiste la définition mathématique des quantités complexes. Le symbole i n'a aucun sens par lui-même, il sert seulement à maintenir séparés l'un de l'autre les deux nombres a et b qui jouent un rôle différent dans les opérations que nous allons définir. Le signe $+$ sert à marquer la connexion des deux nombres a et b et son emploi se justifiera de lui-même un peu plus loin.

Le calcul des quantités complexes repose sur les huit conventions suivantes que nous indiquerons en les numérotant :

40. Premières conventions. — La première convention est relative à l'*égalité*. On écrit

$$(1) \qquad a + bi = a' + bi',$$

si l'on a séparément $a = a'$ et $b = b'$. de sorte qu'une équation entre quantités complexes revient à deux équations entre quantités réelles.

Les trois conventions suivantes, où la notation elle-même joue un rôle essentiel, sont exprimées par les trois équations :

$$(\text{II}) \qquad a + 0i = a,$$

$$(\text{III}) \qquad 0 + bi = bi,$$

$$(\text{IV}) \qquad 0 + 1i = i.$$

Elles font rentrer respectivement dans l'ensemble des quantités complexes les quantités réelles, les expressions de la forme bi que l'on appelle *purement imaginaires* et enfin le symbole i lui-même que l'on appelle l'*unité imaginaire.*

Les quantités réelles rentrant maintenant dans les quantités complexes, il faudra prendre soin, dans les définitions suivantes, de n'introduire aucune règle qui contredise celles déjà établies pour les quantités réelles.

La règle II montre qu'une quantité imaginaire n'est nulle ou égale à zéro que si l'on a séparément :

$$a = 0, \qquad b = 0.$$

La quantité réelle et positive $\sqrt{a^2 + b^2}$ s'appelle le *module* de la quantité $(a + bi)$ et se représente par $|a + bi|$. Un nombre complexe est nul si son module est nul et seulement dans ce cas.

41. L'addition et la multiplication sont définies par les équations

$$\text{(V)} \qquad (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i,$$
$$\text{(VI)} \qquad (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i,$$

que l'on est en droit de poser, car elles se réduisent à des identités quand leurs termes sont réels. Donc *la somme* et *le produit* de deux nombres complexes sont de nouveaux nombres complexes entièrement déterminés. Il est à peine nécessaire de faire remarquer que ces définitions sont faites de manière à conserver les propriétés commutative, associative et distributive, qui correspondent aux relations :

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$
$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

aux relations analogues dans la multiplication et à l'équation

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Les équations V et VI donnent lieu à des cas particuliers remarquables :

1° Eu égard à II et III, l'équation V montre que $a + bi$ est la somme des deux nombres a et bi. Le nombre a est la partie réelle de $a + bi$ et le nombre bi est sa partie imaginaire.

2° Eu égard à IV, l'équation VI montre aussi que bi est le produit des deux nombres b et i.

Il résulte de là que l'emploi des signes d'opération dans la

notation du nombre complexe $a + bi$ ne peut prêter à aucune confusion.

3° Si l'on fait, dans l'équation VI, $a = a' = 0$ et $b = b' = 1$, elle se réduit à

$$i^2 = -1.$$

Donc tous les calculs relatifs à l'addition et à la multiplication des quantités complexes pourront se faire par l'application des règles du calcul algébrique habituel, à condition de traiter le symbole i comme une quantité dont le carré serait égal à -1. Cette propriété explique comment il se fait que le nombre i se soit introduit en algèbre sous la forme $\sqrt{-1}$. L'usage que l'on a fait de cette notation sans la définir a fait considérer parfois l'existence des quantités complexes comme une sorte de paradoxe.

4° Si l'on fait, dans l'équation VI, $a' = a$ et $b' = -b$, elle donne

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Deux quantités complexes qui ne diffèrent que par le signe de la partie imaginaire sont dites *conjuguées*. On voit que le produit des deux quantités conjuguées est réel et positif et égal au carré du module de chacune de ces deux quantités. La quantité $a^2 + b^2$ s'appelle aussi la *norme* de la quantité complexe $a \pm bi$.

42. La soustraction et la division sont, par définition, les *opérations inverses* de l'addition et de la multiplication.

Soustraire $(a' + b'i)$ de $(a + bi)$ c'est déterminer le nombre $x + yi$ qui vérifie la condition

$$(a + bi) = (a' + b'i) + (x + yi) = (a' + x) + (b' + y)i.$$

Ce nombre $x + yi$ se représente par $(a + bi) - (a' + b'i)$. On aura donc, par la définition de l'égalité,

$$\text{(VII)} \qquad (a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$$

et cette équation définit la *soustraction*.

Diviser $(a + bi)$ par $(a' + b'i)$ c'est trouver un nombre $x + yi$ appelé *quotient* qui vérife la condition

$$(a + bi) = (a' + b'i)(x + yi),$$

ou, en multipliant les deux membres par $a' - b'i$,

$$(a + bi)(a' - b'i) = (a'^2 + b'^2)(x + yi).$$

Le quotient se représente par $\frac{a + bi}{a' + b'i}$ et l'on a

$$\text{(VIII)} \quad \frac{a + bi}{a' + b'i} = \left(\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}\right) + \left(\frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}\right) i.$$

Cette équation définit la *division*. Elle montre que la division est toujours possible et conduit à un résultat unique et bien déterminé pourvu que le diviseur ne soit pas nul.

43. Théorème. — *Si, dans une somme, un produit, une différence, un quotient de nombres complexes, on remplace chaque terme par son conjugué, les résultats seront aussi remplacés par leurs conjugués.* C'est ce qui résulte immédiatement des formules précédentes. Donc, *dans toute relation entre quantités complexes qui ne comporte que les quatre opérations rationnelles, il est permis de remplacer i par — i.*

Soit, par exemple, l'équation

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + i(ab' + ba') ;$$

en la multipliant membre à membre avec sa conjuguée, on trouve

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2$$

Donc *le module (la norme) d'un produit est égal au produit des modules (des normes) de chaque facteur.*

On conclut de là qu'*un produit de plusieurs facteurs s'annule seulement si l'un des facteurs est nul.*

44. Théorème. — *Le module d'une somme ne peut pas surpasser la somme des modules de chaque terme.*

Ce théorème se vérifie d'abord pour les deux nombres 1 et $(a + bi)$, c'est-à-dire que l'on a

$$1 + \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \sqrt{(1 + a)^2 + b^2}.$$

En effet, élevée au carré, cette relation revient à la suivante

$$2\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 2a,$$

qui est apparente et dans laquelle l'égalité ne peut avoir lieu que si b est nul et a positif, donc $a + bi$ réel et positif.

Ensuite la démonstration s'étend au cas général. En effet, soient α et α' deux nombres différents de zéro, et β leur quotient $\alpha' : \alpha$; on a

$$|\alpha| + |\alpha'| = |\alpha| (1 + |\beta|)$$
$$|\alpha + \alpha'| = |\alpha| \; |1 + \beta|.$$

Donc $|\alpha + \alpha'|$ sera inférieur à $|\alpha| + |\alpha'|$ sauf si β est réel et positif.

D'autre part, *le module d'une somme est au moins égal à la différence des modules de ses deux termes,* car les deux relations

$$|\alpha \pm \alpha'| < |\alpha| + |\alpha'|,$$
$$|\alpha \pm \alpha'| > |\alpha| - |\alpha'|,$$

se ramènent l'une à l'autre par le changement de α en $\alpha \mp \alpha'$.

45. Représentation géométrique des quantités complexes. — La quantité complexe $(a + bi)$ se représente géométriquement par une droite de longueur et de direction déterminée, menée à partir d'une origine arbitraire, et ayant comme projections suivant deux axes rectangulaires les quantités a et b.

Si cette droite est menée à partir de l'origine des coordonnées, son extrémité M a pour coordonnées rectangulaires a et b. Le point M s'appelle l'*affixe* (Cauchy) de la quantité complexe et peut aussi lui servir de représentation géométrique.

Les coordonnées polaires r et θ de l'affixe M jouent un rôle important dans l'étude de la quantité complexe. Elle sont définies par les relations $a = r \cos\theta$, $b = r \sin\theta$; d'où

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{r}.$$

Le rayon vecteur r est le *module* de la quantité complexe. L'angle θ s'appelle son *argument*, il n'est déterminé qu'à un multiple près de 2π quand a et b sont donnés.

Cette représentation géométrique et la considération du module et de l'argument ont un intérêt particulier dans les diverses opérations précédemment définies.

La somme de plusieurs nombres complexes est représentée géométriquement par la résultante des droites représentatives de ses termes.

Si l'on fait le produit et le quotient de deux nombres complexes

$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$a' + b'i = r'(\cos\theta' + i\sin\theta'),$$

on trouve, par les propriétés connues des fonctions trigonométriques,

$$(a + bi)(a' + b'i) = rr' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')],$$

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{r}{r'}\left[\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')\right].$$

Donc le module d'un produit est égal au produit des modules de ses facteurs et son argument à la somme de leurs arguments ; le module d'un quotient est égal au quotient des modules de ses deux termes et son argument à la différence de leurs arguments.

§ 7. Variables complexes et fonctions rationnelles d'une variable complexe.

46. Variables complexes. — Si x et y sont deux variables réelles, $x + yi$ est une *variable complexe*.

Si x et y ont respectivement pour limites a et b, on dit que $x + yi$ a pour limite $a + bi$ et l'on écrit

$$\lim (x + yi) = a + bi.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $x + yi$ ait pour limite $a + bi$ est que la quantité

$$|(x + yi) - (a + bi)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

ait pour limite 0.

Cette condition est suffisante, car, si ce radical tend vers zéro, chacune des quantités de valeur absolue moindre $(x - a)$ et $(y - b)$ aura pour limite 0. Elle est nécessaire, car ce radical tend aussi vers 0 avec $(x - a)$ et $(y - b)$.

Le critère de convergence de Cauchy (n° 16) s'étend de lui-même aux variables complexes.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable complexe z qui passe par une succession illimitée de valeurs ait une limite finie, est qu'à tout nombre positif donné ε, corresponde une valeur de z qui diffère de moins de ε de toutes les suivantes.

Les principes généraux relatifs à la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de variables réelles (n° 18) s'appliquent évidemment aussi aux variables complexes.

Une variable complexe qui a pour limite 0 est dite *infiniment*

petite. Pour qu'une variable complexe soit infiniment petite, il est nécessaire et suffisant que son module soit infiniment petit.

47. Polynome entier. — Soit z une variable complexe, et

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n$$

un polynome de degré n à coefficients réels ou complexes. A chaque valeur de z correspond une valeur bien déterminée de ce polynome. On peut donc dire que ce polynome est *une fonction de la variable complexe* z. De plus, c'est une *fonction continue* pour toute valeur de z, ce qui veut dire que, si l'on fait tendre z vers une valeur particulière α d'une manière quelconque, on aura la condition

$$\lim_{z=\alpha} f(z) = f(\alpha).$$

On démontre, en algèbre, que le polynome $f(z)$ peut toujours se décomposer en un produit de facteurs linéaires

$$f(z) = A_0 (z - \alpha)^\lambda (z - \beta)^\mu \dots,$$

les lettres α, β,... désignant des quantités réelles ou complexes et λ, μ,... des entiers positifs. Le polynome ne peut s'annuler que pour les valeurs $z = \alpha$, $z = \beta$,... que l'on appelle ses *racines*. Celles-ci sont simples ou multiples : les nombres λ, μ,... sont les degrés de multiplicité des racines respectives α, β,... La somme $\lambda + \mu + \dots$ est égale à n. On énonce cette propriété en disant qu'un polynome de degré n a toujours n racines.

48. Fonction rationnelle. — Le quotient de deux polynomes,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

est ce qu'on appelle une *fonction rationnelle de* z. Sa valeur est bien déterminée pour toute valeur de z qui n'annule pas le dénominateur. On a, d'après les principes rappelés plus haut (n° 46),

$$\lim_{z=\alpha} f(z) = f(\alpha),$$

sauf si α annule le dénominateur. Donc une fonction rationnelle est *continue*, sauf pour les valeurs de z qui sont racines du dénominateur et qui rendent la fraction *infinie*.

Quand le dénominateur se réduit à une constante, la fraction se réduit à un polynome entier. On dit aussi qu'un polynome est une fonction *rationnelle et entière de z.*

L'expression $P(z) : Q(z)$ est *une fraction proprement dite* lorsque le degré du numérateur est moindre que celui du dénominateur. Si P était du même degré ou de degré plus élevé que Q, en effectuant la division, on décomposerait $P : Q$ en un quotient entier et une fraction proprement dite.

§ 8. Des ensembles en général. Leur puissance.

49. Puissance d'un ensemble. — Un *ensemble* est une collection d'objets ou d'éléments quelconques en nombre fini ou infini. Nous avons déjà parlé de l'ensemble des nombres entiers, de celui des nombres rationnels, réels... Mais on peut aussi considérer l'ensemble des polygones inscrits dans une courbe, l'ensemble des fonctions de x, l'ensemble des équations algébriques, etc.

On dit que deux ensembles E et E_1 ont *même puissance* (Cantor) si l'on peut établir une correspondance *parfaite* ou *uniforme* entre les éléments des deux ensembles, de sorte qu'à chaque élément de l'un corresponde un élément de l'autre et réciproquement.

Si les deux ensembles sont *finis*, c'est-à-dire composés d'un nombre limité d'objets, l'idée de puissance se confond avec celle du nombre des objets. Une collection finie ne peut avoir le même nombre qu'une de ses parties ; au contraire, on peut établir une correspondance parfaite entre une collection infinie et l'une de ses parties. C'est ainsi, par exemple, que l'on peut établir une correspondance parfaite entre tous les nombres entiers et tous les nombres pairs, chaque nombre entier correspondant au nombre double : l'ensemble des nombres pairs a même puissance que celui de tous les entiers.

Après les ensembles finis, les plus simples sont les ensembles *dénombrables.*

50. Ensembles dénombrables. — *a)* Un ensemble qui a la même puissance que celui des nombres entiers 1, 2, 3,... n,... est un ensemble *dénombrable.* C'est donc un ensemble dont on peut numéroter tous les éléments, car, à chaque élément, correspond un entier qui sera son numéro. Par conséquent, les éléments peuvent être distingués par un indice et rangés dans une suite illimitée

$$u_1, \quad u_2, \dots \quad u_n \dots,$$

analogue à la suite des entiers où chaque terme est précédé et suivi d'un autre.

b) Tout ensemble d'éléments u (r, s,... t) qui se distinguent par les valeurs d'un nombre limité de paramètres ou d'indices r, s,... t susceptibles de toutes les valeurs entières 1, 2,... n,..., *est un ensemble dénombrable.*

Soit, en effet, $r + s + ... + t = n$ la somme de ces indices ; il n'y a qu'un nombre limité d'éléments pour chaque valeur de n et on peut les numéroter ; on peut donc numéroter tous les éléments en commen çant par la plus petite valeur de n et en passant successivement aux valeurs plus grandes.

En particulier, l'ensemble des nombres rationnels positifs est dénombrable, car ces nombres peuvent se mettre sous forme de fraction irréductible $p : q = u\,(p, q)$ et ils se distinguent par deux indices. D'ailleurs, *l'ensemble de tous les nombres rationnels est aussi dénombrable*, en vertu du théorème suivant :

c) L'ensemble formé par la réunion d'un nombre limité d'ensembles dénombrables est dénombrable, car on peut numéroter d'abord tous les premiers éléments, puis tous les seconds, etc. — Plus généralement, *l'ensemble formé par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable*, car on peut désigner par $u\,(m, n)$ le $m^{ième}$ élément du $n^{ième}$ ensemble, de sorte que les éléments de l'ensemble total se distinguent par deux indices : celui-ci est dénombrable.

d) Toute infinité d'éléments comprise dans un ensemble dénombrable est dénombrable.

En effet, on peut ranger les éléments de l'ensemble partiel dans l'ordre où ils se rencontrent dans l'ensemble total (supposé dénombré).

e) On ne change pas la puissance d'un ensemble non dénombrable, si l'on supprime une partie de ses éléments formant un ensemble dénombrable.

Partageons un ensemble E non dénombrable en deux autres D et E′ dont D soit dénombrable : nous écrirons

$$E = D + E'.$$

L'ensemble E′ ne sera pas dénombrable, sinon E le serait aussi (c). Partageons arbitrairement E′ en deux ensembles D′ et E″ dont D′ soit dénombrable ; nous pouvons encore écrire

$$E' = D' + E''.$$

Soit (D + D′) l'ensemble *dénombrable* (c) formé par la réunion de D et D′ ; il vient

$$E = (D + D') + E'', \qquad E' = D' + E''$$

Donc E a même puissance que E′, car on peut établir une correspondance uniforme entre les deux ensembles D + D′ et D′.

f) Réciproquement, on ne change pas la puissance d'un ensemble non dénombrable en lui ajoutant un ensemble dénombrable.

En effet, l'ensemble somme n'est pas dénombrable, donc sa puissance ne change pas quand on en retranche l'ensemble ajouté (e).

51. Ensembles qui ont la puissance du continu. — *a)* Un ensemble qui a la même puissance que celui des nombres réels compris entre 0 et 1, est un ensemble qui a *la puissance du continu.*

L'ensemble des nombres compris dans un intervalle $(a. b)$ quelconque a la puissance du continu, car la relation $x = a + (b - a) y$ fait correspondre à tout nombre x de l'intervalle (a, b) un nombre y compris entre 0 et 1 et réciproquement.

b) L'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle 01 *a aussi la puissance du continu.*

En effet, la suppression de l'ensemble *dénombrable* des nombres rationnels ne change pas la puissance de l'ensemble des nombres entre 0 et 1 (n° 50, *d* et *e*).

c) Un ensemble qui a la puissance du continu n'est pas dénombrable.

Considérons l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle 01. Ils se développent chacun d'une seule manière en fraction continue illimitée (sans partie entière). Supposons, par impossible, que ces nombres puissent se ranger dans une suite dénombrable $x_1, x_2,\ldots x_n,\ldots$ et soit, en général,

$$x_n = (a_1^n, a_2^n,\ldots a_n^n,\ldots)$$

le développement de x_n. On peut écrire immédiatement une fraction continue, de valeur irrationnelle < 1,

$$x = (b_1, b_2,\ldots b_n,\ldots),$$

non comprise dans la suite, en prenant b_1 différent de a_1^1, b_2 différent de $a_2^2,\ldots$ b_n différent de $a_n^n,\ldots$ Donc le dénombrement n'est pas complet : l'ensemble considéré n'est pas dénombrable.

d) En réunissant deux ensembles (sans éléments communs) E *et* E_1 *qui ont la puissance du continu, on forme un ensemble* $E + E_1$ *qui a la puissance du continu.*

En effet, on peut faire correspondre E aux nombres compris entre 0 et 1, E_1 aux nombres compris entre 1 et 2 (1 exclu), alors $E + E_1$ correspond aux nombres de l'intervalle (0,2) : sa puissance est celle du continu.

e) Plus généralement, l'ensemble formé par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles (sans éléments communs) qui ont la puissance du continu, a encore la même puissance.

En effet, soient $E_1, E_2,\ldots E_n,\ldots$ ces ensembles ; choisissons une suite de nombres croissants $a_1, a_2,\ldots a_n,\ldots$ ayant une limite b. Faisons correspondre E_1 aux nombres compris entre a_1 et a_2, E_2 aux nombres compris entre a_2 et a_3 (a_2 exclu), et ainsi de suite ; l'ensemble somme correspondra aux nombres compris entre a et b (b exclu) ; il aura donc la puissance du continu.

En particulier, l'*ensemble de tous les nombres réels a la puissance du continu,* puisqu'ils appartiennent à une infinité dénombrable d'intervalles consécutifs.

f) Tout ensemble d'éléments $u(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$ *qui se distinguent par les valeurs d'une infinité dénombrable de paramètres, a, susceptibles des deux valeurs* 0 *et* 1, *a la puissauce du continu.*

On fait correspondre les éléments u aux nombres de l'intervalle (0,1) en écrivant ceux-ci dans le système binaire, lequel n'emploie que les deux chiffres 0 et 1.

L'ensemble de toutes les fractions illimitées écrites avec 0 et 1,

$$0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

correspond bien *uniformément* à celui des éléments u, mais pas à celui des nombres de l'intervalle (0,1), car un même nombre rationnel dont le dénominateur est une puissance de 2 admet deux représentations différentes en fraction illimitée (l'une avec une infinité de 0, l'autre avec une infinité de 1). Par exemple,

$$\frac{1}{2} = 0,100 \ldots = 0,0111 \ldots$$

L'ensemble des fractions illimitées correspond donc à l'ensemble des nombres de l'intervalle (0,1) avec, en plus, celui des nombres rationnels précédents. Mais celui-ci est dénombrable, de sorte que la puissance de l'ensemble des fractions, donc de l'ensemble des u, reste celle du continu (nº 50, *f*).

g) Tout ensemble d'éléments $u(x_1, x_2, \ldots x_r, \ldots)$ *qui se distinguent par les valeurs d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de paramètres* x *susceptibles d'un ensemble de valeurs ayant la puissance du continu, a encore la puissance du continu.*

En effet, en vertu de *f*, la valeur de x_r peut se définir par celles (0 ou 1) d'une infinité dénombrable de paramètres correspondants :

$$a_{r1}, a_{r2}, \ldots a_{rs}, \ldots \text{ (un indice variable).}$$

Mais alors l'élément $u(x_1, x_2, \ldots x_r, \ldots)$ est défini par les valeurs (0 ou 1) de l'infinité *dénombrable* (nº 50, *c*) des paramètres a_{rs} (deux indices variables), ce qui ramène au théorème précédent.

52. Criterium d'égalité pour les puissances (*). — *Soient* A *et* B *deux ensembles ; si l'on peut faire correspondre à tous les éléments de* A *des éléments différents de* B *et à tous ceux de* B *des éléments différents de* A, *les deux ensembles ont même pnissancc.* Autrement dit, *si* A *a même puissance qu'une partie de* B *et* B *même puissance qu'une partie de* A, *les deux ensembles* A *et* B *ont même puissance.*

Désignons par bA la partie de A qui a même puissance que B et par rA l'ensemble restant ; par aB la partie de B qui a même puissance que A et par ρB l'ensemble restant. Nous pourrons écrire

$$A = bA + rA, \qquad B = aB + \rho B,$$

(*) Les résultats des nº 52 et 53 ne seront pas utilisés dans la suite du cours.

et, bA ayant la puissance de B, il suffit d'établir que A et bA ont même puissance.

Remarquons que tout ensemble A_1 qui a la puissance de A admet un partage qui correspond à celui de A, car, après avoir établi la correspondance entre A et A_1 on peut réunir dans un ensemble bA_1 les éléments de A_1 qui correspondent à ceux de bA et dans un ensemble rB_1 les éléments de A_1 qui correspondent à ceux de rA. En particulier, l'ensemble aB peut ainsi se partager en deux autres, baB et raB. A ce point de vue, on peut donc considérer b et r comme des symboles d'opération, applicables à tout ensemble de même puissance que A, et destinés à le partager en deux autres de mêmes puissances que bA et rA. Entre ces deux opérations, on aura donc les relations symboliques :

$$1 = b + r, \qquad r = 1 - b.$$

De même, on peut interpréter les lettres a et ρ comme deux signes d'opération, applicables à tout ensemble de même puissance que B, par exemple bA, et fournissant respectivement deux ensembles abA et ρbA de mêmes puissances que aB et ρB respectivement. On aura encore

$$1 = a + \rho, \qquad \rho = 1 - a,$$

Ceci entendu, la démonstration est très simple.

Nous pouvons former une suite illimitée d'ensembles ayant alternativement mêmes puissances que A ou que B comme c'est indiqué ci-dessous :

$$A, \qquad bA, \qquad abA, \qquad ababA, \ldots$$

Chaque ensemble contient tous les suivants. Désignons par D l'ensemble (infini, fini ou nul) des éléments communs à toute la suite. On peut obtenir D, en supprimant dans A : d'abord les éléments étrangers à bA, puis les éléments de bA qui sont étrangers à abA, etc. Il vient

$$D = A - (A - bA) - (bA - abA) - \ldots$$

Ces parenthèses sont alternativement des ensembles des types r et ρ ; on peut donc écrire

$$A = D + rA + \rho bA + rabA + \rho babA + \ldots$$

Supprimons rA de part et d'autre et intervertissons les termes en r et en ρ, il viendra, en observant que $A - rA$ est bA,

$$bA = D + rabA + \rho bA + rababA + \rho babA + \ldots$$

On voit ainsi que A et bA sont décomposés en une infinité dénombrable d'ensembles ayant deux à deux même puissance. On établira la correspondance entre A et bA en faisant correspondre les éléments des ensembles de même rang dans les deux sommes écrites ci-dessus. Tous les éléments auront leurs correspondants.

53. Puissance de l'ensemble des fonctions. — Comme application du théorème précédent, montrons que *l'ensemble des fonctions continues d'une variable a la puissance du continu.*

Une fonction continue de x est définie par les valeurs qu'elle prend aux points rationnels, donc par un ensemble dénombrable de paramètres (soumis encore à certaines restrictions). La puissance de l'ensemble est donc au plus égal à celle du continu (nº 51, g). Elle ne peut être moindre, car, à chaque nombre différent N, on peut faire correspondre une fonction continue différente, prenant la valeur N pour $x = a$. Donc cette puissance est égale à celle du continu.

D'après cela, *l'ensemble de toutes les fonctions continues d'une variable peut être compris dans une famille* $F(x, c)$ *à un seul paramètre arbitraire* (chaque fonction correspondant à une valeur particulière du paramètre). Toutefois $F(x, c)$ ne sera pas fonction continue des variables x, c, car alors $F(x, x) + 1$ serait une fonction continue non comprise dans la famille (elle diffère de chaque $F(x, c)$ pour $x = c$).

Par contre, *l'ensemble de toutes les fonctions discontinues de x a une puissance supérieure à celle du continu.* En effet, il est impossible de les comprendre toutes dans une famille $F(x, c)$ dépendant d'un paramètre c qui varie de 0 à 1, puisque $F(x, x) + 1$ n'est pas comprise dans la famille.

§ 9. Ensembles de points.

54. Dimensions. Puissance des ensembles de points. — Soient x, y,... des variables réelles. Chaque système de valeurs particulières de ces variables s'appelle un *point* : les valeurs de x, y,... sont ses *coordonnées.* Un *ensemble de points* a autant de *dimensions* qu'il entre de variables dans la définition de ses points. L'ensemble est *linéaire* s'il n'y a qu'une variable, et les points sont alors situés sur une droite. Les points sont dans un plan s'il y a deux variables ; dans l'espace, s'il y en a trois ; dans un espace à n dimensions, s'il y en a n.

On peut considérer l'ensemble des points d'un carré dans le plan, celui des points d'un cube dans l'espace et, plus généralement encore, celui des points d'un cube dans l'hyperespace à n dimensions. On pourrait penser que la puissance de l'ensemble augmente avec ses dimensions, mais il n'en est rien. Tous ces ensembles ont la puissance du continu (nº 51, g), parce qu'ils sont définis par un certain nombre de paramètres (leurs coordonnées) qui varient dans un intervalle, par exemple entre 0 et 1. Donc *le nombre des dimensions est sans influence sur la puissance* (Cantor).

55. Bornes d'un ensemble de points. Point-limite. Ensemble dérivé. — Un ensemble est *borné* si chacune des coordonnées variables est bornée et les bornes des variables sont les *bornes de l'ensemble.* En particulier, un ensemble linéaire est borné par deux valeurs a et b de x.

Soient $(a, b, \ldots)$ et $(a', b', \ldots)$ deux points p et p' ; on appelle distance des deux points la quantité

$$pp' = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + \ldots}$$

Si l'ensemble est borné, la distance de deux de ses points l'est aussi et elle a une borne supérieure que l'on appelle le *diamètre* de l'ensemble.

Etant donnée une suite illimitée de points différents $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ on dit qu'un point p est la limite de cette suite, si la distance pp_n a pour limite 0 quand n tend vers l'infini.

On nomme *point-limite* d'un ensemble E tout point p (appartenant ou non à E) qui est la limite d'une suite de points de E. Donc, si p est un point-limite, on peut, quelque petit que soit δ positif, trouver un point de E dont la distance à p soit $<\delta$. Réciproquement, tout point p jouissant de cette propriété est un point-limite.

Observons que, si l'on peut trouver un point de E dont la distance à p soit $<\delta$ quel que soit δ, on peut en trouver une infinité. C'est pourquoi on donne aussi aux points-limites le nom de *points d'accumulation* de l'ensemble. Les points de E qui ne sont pas des points-limites sont des *points isolés*.

L'ensemble des points-limites de E est un nouvel ensemble que l'on désigne par E' et que l'on appelle le *dérivé* de E.

56. Ensembles complémentaires. Points-frontières. Distance d'un point à un ensemble. — Soit E un ensemble. Si cet ensemble ne contient pas tous les points possibles (dans l'espace considéré), les points qui n'appartiennent pas à E forment un nouvel ensemble E_1. Les deux ensembles E et E_1 sont appelés *complémentaires*.

Soit p un point de E, on dit qu'il est *intérieur* à E et *extérieur* à E_1 si l'on peut assigner un nombre positif δ, tel que tout point p' dont la distance à p est $<\delta$ soit aussi un point de E.

Tout point qui n'est ni intérieur ni extérieur à E ne l'est pas non plus à E_1 et s'appelle un *point-frontière* de chacun des deux ensembles.

Soit q un point non compris dans l'ensemble E ; la distance du point q à un point quelconque p de E a une borne inférieure (qui peut être nulle). Cette borne c'est *la distance du point* q à l'ensemble E.

Si E et H sont deux ensembles sans points communs, la *distance des deux ensembles* est la borne inférieure de la distance entre un point de l'un et un point de l'autre.

D'après cela, un *point extérieur* à E est un point dont la distance à E n'est pas nulle ; un *point intérieur*, un point dont la distance au complémentaire E_1 n'est pas nulle ; un *point-frontière*, un point de E ou de E_1 dont la distance à l'autre ensemble est nulle. Un point de E_1 dont la distance à E est nulle est un *point-limite* de E. Définissons une fonction

$e(x, y...)$ égale à 1 en tout point de E, et à 0 en tout autre point : les points-frontières seront évidemment les points de discontinuité de cette fonction.

Tout ensemble compris dans un domaine rectangulaire R *et qui ne contient pas tous les points de ce domaine admet au moins un point-frontière.*

En effet, soient p et p' deux points du domaine dont le premier seul appartienne à E. Faisons varier le point $(x, y,...)$ en ligne droite de p à p' : la fonction $e(x, y,...)$, qui ne dépend que d'une variable sur cette droite, passera de 1 à 0. Comme elle ne passe pas par les valeurs intermédiaires, elle est discontinue en un point au moins de cette droite : celui-ci sera un point-frontière.

57. Ensembles fermés. — On dit qu'un ensemble E est *fermé* s'il contient tous les points de son dérivé E'.

Tout ensemble E' *dérivé d'un autre* E *est fermé.*

En effet, soient 2δ un nombre positif arbitraire et p'' un point-limite de E'. Je dis que p'' est aussi un point-limite de E. En effet p'' est à une distance $<\delta$ d'un point p' de E', qui est lui-même à une distance $<\delta$ d'un point de E. Donc p'' est à une distance $<2\delta$ d'un point de E et est un point-limite de E. Donc E', contenant ses points-limites, est fermé.

58. Principe de Bolzano-Weierstrass. — *Tout ensemble borné* E *qui contient une infinité de points, renferme au moins un point-limite.*

Considérons, pour fixer les idées, un ensemble borné E à deux dimensions. On peut l'enfermer dans un rectangle R. Divisons ce rectangle en morceaux par des transversales : il y aura au moins un morceau R_1 contenant une infinité de points. Divisons, de même, R_1 en morceaux plus petits : il y aura encore un morceau R_2 contenant une infinité de points. Poursuivons indéfinitivement cette subdivision, de manière à former une suite illimitée de régions R_1, R_2, R_3,.... contenant toutes une infinité de points, chacune intérieure à toutes les précédentes et décroissant indéfiniment dans tous les sens. Ces régions auront évidemment un point p pour limite. Ce point p sera à l'intérieur de toutes les régions R ou sur leur contour et ce sera un point-limite, puisqu'il y a une infinité de points de E aussi rapprochés de lui qu'on le voudra.

59. Points de condensation d'un ensemble. — On appelle *point de condensation* (Lindelof) un point p tel qu'il y ait une infinité non dénombrable de points de E à une distance du point p inférieure à δ, quelque petit que soit le nombre positif δ.

Tout ensemble de points E *qui n'est pas dénombrable, admet au moins un point de condensation, qu'il soit borné ou non.*

Considérons, pour fixer les idées, un ensemble E à deux dimensions. On peut toujours supposer R assez grand pour que l'ensemble des

points de E compris dans un cercle de rayon R autour de l'origine ne soit pas dénombrable. Sinon, en donnant à R une suite dénombrable de valeurs R_1, R_2,... R_n,... croissant à l'infini, on pourrait décomposer E dans une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables, formés respectivement : le premier des points compris dans le cercle de rayon R_1 ; le second, des points compris entre les cercles de rayons R_1 et R_2 ; le troisième, des points compris entre les cercles R_2 et R_3, et ainsi de suite : l'ensemble E serait dénombrable.

On est ainsi ramené à démontrer le théorème pour un ensemble borné. Il suffit, pour cela, de répéter la démonstration du théorème de Bolzano Weierstrass (nº 58) en remplaçant les mots : *infinité de points* par *infinite non dénombrable de points* et *point-limite* par *point de condensation.*

60. Ensembles parfaits. — On appelle ensemble *parfait* un ensemble qui coïncide avec son dérivé E'. D'après cela, un ensemble parfait est un ensemble fermé qui ne contient pas de point isolé.

L'ensemble K *des points de condensation d'un ensemble* E *non dénombrable, est un ensemble parfait.*

Il faut prouver : 1º) que K est fermé ; 2º) que K ne contient pas de point isolé :

D'abord tout point-limite, p', de K appartient à K, car il y a des points de K aussi voisins qu'on veut de p', donc aussi une infinité non dénombrable de points de E, et p' est un point de condensation. Donc K est fermé.

2º Il faut montrer que tout point p de K n'est pas un point isolé. Soient δ_1, δ_2,... δ_n,... une suite de quantités positives décroissantes ayant pour limite 0 ; supposons, par impossible, qu'il n'y ait pas d'autre point de condensation que p dans un rayon δ_1 autour de ce point. L'ensemble des points de E situés à une distance $<\delta_1$ du point p se partagera dans une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables, formés respectivement des points dont la distance à p est comprise entre δ_1 et δ_2, entre δ_2 et δ_3, etc. Donc cet ensemble serait dénombrable et p ne serait pas un point de condensation de E.

61. Théorème de Cantor-Bendixson. — *Tout ensemble fermé* F *est dénombrable ou peut se décomposer en un ensemble parfait* P *et un ensemble dénombrable* D.

J'observe d'abord que F (supposé non dénombrable) contient tous ses points de condensation. En effet, tout point de condensation de F est évidemment un point-limite de F, donc un point de F (car F, étant fermé, contient ses points-limites).

Soient donc P l'ensemble des points de F qui sont des points de condensation, et D l'ensemble des autres points de F ; P est parfait (nº 60) ; reste à montrer que D est dénombrable.

Errata

A cet effet, je remarque que, quelque petit que l'on se donne le nombre positif δ, l'ensemble des points de E dont la distance à P (nº 56) surpasse δ, est dénombrable ; sinon cet ensemble admettrait un point de condensation (nº 59), il renfermerait des points infiniment voisins de ce point de condensation (qui est un point de P) et sa distance à P ne serait pas $> \delta$.

Ceci posé, D peut se décomposer dans une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables formés respectivement : le premier des points dont la distance à P surpasse δ ; le second des points restants dont la distance à P surpasse $\delta : 2$;... le $n^{\text{ième}}$ des points restants dont la distance à P surpasse $\delta : 2^n$, etc. On atteindra bien ainsi tous les points de D, car un point déterminé qui ne serait pas à distance finie de P serait un point-limite de P et appartiendrait non à D mais à P qui est parfait. Donc D est dénombrable.

62. Structure d'un ensemble parfait linéaire. — Un ensemble linéaire est un ensemble de points sur une droite, ou un ensemble de valeurs d'une seule variable. Nous nous contenterons de considérer les ensembles bornés, ce qui ne porte pas atteinte à la généralité des conclusions.

Soit P un ensemble borné et parfait, il sera borné par deux points a et b ($a < b$) qui lui appartiennent (car un ensemble parfait contient ses points-limites). Si P comprend tous les points de l'intervalle ab ou, plus généralement, d'un nombre, fini et déterminé, d'intervalles compris entre a et b, l'ensemble est complètement défini par la connaissance de ces intervalles. C'est l'hypothèse la plus simple. Supposons que ce ne soit pas le cas.

Soit q un point de l'intervalle ab qui n'appartient pas à P ; ce point partage l'ensemble P en deux autres : un ensemble P_1 formé des points de P qui sont à gauche de q et un ensemble P_2 formé de ceux qui sont à droite de q. Les deux ensembles sont parfaits. L'ensemble P_1 a pour borne supérieure un point M de P et l'ensemble P_2, pour borne inférieure un point N de P. Donc ni M ni N ne coïncide avec q ; et q tombe dans un intervalle MN dont les extrémités seules appartiennent à P. On dit que l'intervalle MN ainsi défini est un *intervalle contigu* à l'ensemble P (BAIRE). Tout point de l'intervalle ab qui n'appartient pas à P est donc *intérieur* au sens étroit à un intervalle contigu à l'ensemble P.

Ceci posé, l'ensemble des intervalles contigus à l'ensemble P est nécessairement dénombrable, car, comme ces intervalles n'empiètent pas, il n'y en a qu'un nombre limité dont l'amplitude surpasse un nombre donné. On s'en assure en remarquant que la somme de ces amplitudes ne peut surpasser celle de l'intervalle ab qui contient tous ces intervalles. Donc ces intervalles peuvent se dénombrer en les rangeant par ordre de grandeur décroissante.

De là le théorème de Cantor :

Un ensemble parfait P *s'obtient en supprimant de l'intervalle ab qui le contient tous les points* INTÉRIEURS *à un ensemble dénombrable d'intervalles* MN *sans points communs, et même sans extrémités communes* (car P, étant parfait, ne peut contenir de point isolé).

Réciproquement, *si l'on supprime de l'intervalle ab tous les points intérieurs à une infinité dénombrable d'intervalles sans points communs ni extrémités communes, l'ensemble* P *restant sera parfait.*

D'abord il reste un ensemble de points P, puisque les extrémités des intervalles ne sont pas enlevées ; d'où il suit encore qu'un intervalle qui ne renferme plus de points de P a été enlevé en une fois. Montrons que P est : 1° fermé ; 2° sans points isolés :

1° Tout point étranger à P est *intérieur* (au sens étroit) à un intervalle enlevé et ne peut être un point-limite de P. Donc P est fermé.

2° Un point isolé de P ne pourrait être que l'extrémité commune de deux intervalles enlevés. Donc P est sans points isolés.

63. Ensembles parfaits linéaires qui ne sont denses dans aucun intervalle. — On dit qu'un ensemble est *dense* lorsque, entre deux points de l'ensemble, on peut toujours en trouver un troisième et, par suite, une infinité. On peut, par le procédé de suppressions indiqué ci-dessus, construire des ensembles parfaits qui ne sont denses dans aucun intervalle. En voici d'ailleurs un exemple très simple. Nous nous bornons, pour simplifier, à l'intervalle 01.

L'ensemble P *de toutes les fractions décimales (limitées ou non) qui s'écrivent avec les chiffres* 0 *et* 1, *est parfait et n'est dense dans aucun intervalle* (*).

En effet, cet ensemble est fermé, car une fraction étrangère à l'ensemble n'est pas limite de fractions de l'ensemble. Il ne contient pas de point isolé, car on peut, en modifiant des décimales très éloignées, altérer aussi peu qu'on veut une fraction de l'ensemble. Il est donc parfait. Enfin il n'est dense dans aucun intervalle, car il y a, dans tout intervalle, des fractions qui s'écrivent avec d'autres chiffres que 0 et 1 et appartiennent, par conséquent, à des intervalles contigus à P.

64. Ensembles ordonnés et semblables. Application de deux ensembles l'un sur l'autre. — Un ensemble E est ordonné, lorsque ses éléments

(*) Plus généralement, est dans ce cas l'ensemble de toutes les fractions *illimitées* dans la base de numération B qui prennent une partie seulement des chiffres 0, 1, 2,... $B-1$ (au moins deux et le chiffre $B-1$ ne peut être pris sans 0). — Est encore dans ce cas l'ensemble de toutes les fractions continues *illimitées* qui s'écrivent avec un nombre limite de quotients incomplets différents. — La démonstration se fait comme celle du texte. — Il serait facile de généraliser encore bien davantage ces modes de génération.

sont rangés dans un ordre déterminé, de telle sorte que, étant donnés deux éléments quelconques *a* et *b* de l'ensemble, l'un précède l'autre. Cette notion comporte que, si *a* précède *b* et si *b* précède *c*, *a* précède *c*.

Les ensembles de nombres ou de points sur une droite peuvent toujours être ordonnés en rangeant les nombres par ordre de grandeur.

Lorsque deux ensembles sont ordonnés et de même puissance et que l'on peut établir, entre leurs éléments, une correspondance uniforme dans laquelle l'ordre relatif des éléments est conservé, on dit que les deux ensembles sont *semblables*.

La loi qui définit la correspondance s'appelle une *application* d'un des ensembles sur l'autre.

65. Similitudes de tous les ensembles parfaits linéaires non denses. — Soient P et P′ deux ensembles parfaits linéaires non denses, compris sur les segments ab et $a'b'$. On peut les appliquer l'un sur l'autre de manière que l'*ordre de grandeur* entre les éléments correspondants soit conservé. Nous allons réaliser cette application en faisant correspondre les intervalles δ contigus à P à ceux δ' contigus à P′, de manière que les intervalles correspondants soient disposés dans le même ordre sur les deux segments ab et $a'b'$.

Pour cela, faisons correspondre un intervalle δ_1 de P à un intervalle δ_1' de P′ (ces deux intervalles étant le plus grand possible) ; puis un intervalle δ_2 entre a et δ_1 à un intervalle δ_2' entre a' et δ_1', et un intervalle δ_3 entre δ_1 et b à un intervalle δ_3' entre δ_1' et b' (tous quatre le plus grand possible). Continuons ainsi indéfiniment à prendre dans chaque ensemble un intervalle (le plus grand possible) entre chacun de ceux déjà choisis et à faire correspondre ceux qui tombent entre les intervalles déjà correspondants ; nous rencontrerons tous les intervalles et nous les disposerons dans le même ordre.

L'application de P′ sur P en résulte, car, les extrémités des intervalles se correspondent uniformément dans le même ordre et, avec elles, tous leurs points-limites, puisque les ensembles sont fermés. Or ce sont là tous les points de P et P′ ; donc la correspondance entre P et P′ est parfaite.

Deux ensembles parfaits non denses quelconques sont donc applicables l'un sur l'autre avec conservation des points-limites.

66. Application (incomplète) d'un ensemble parfait non dense sur le continu. Puissance des ensembles parfaits. — Une application rigoureuse d'un ensemble P parfait et non dense sur le segment 01 est impossible, parce que les extrémités d'un intervalle contigu à P sont deux points de P entre lesquels il n'y en a pas d'autre, tandis qu'entre deux nombres, il y en a toujours une infinité. Mais l'application peut être réalisée, sauf pour l'infinité *dénombrable* de ces extrémités. Nous allons, en effet, démontrer le théorème suivant :

Si P *est un ensemble parfait non dense, on peut faire correspondre uniformément et* DANS LE MÊME ORDRE DE GRANDEUR *les nombres de l'ensemble* P *et ceux de l'intervalle* 01, *sauf que les deux extrémités d'un intervalle contigu à* P *correspondront au même nombre du segment* 01.

Comme deux ensembles parfaits non denses sont applicables l'un sur l'autre, il suffit d'établir le théorème pour un ensemble particulier.

Considérons donc l'ensemble de toutes les fractions décimales, limitées ou non, dont le développement ne contient que les deux chiffres différents 0 et 1. C'est un ensemble parfait non dense (nº 63). Pour réaliser la correspondance par ordre de grandeur avec le segment 01, il suffit de faire correspondre chaque fraction décimale à celle qui s'écrit de la même manière dans la base de numération 2. Chaque nombre du segment 01 s'obtient ainsi une fois, sauf les nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2. Chacun de ceux-ci admet deux expressions différentes dans la base 2, l'une finie et l'autre pas (par exemple, 0.1 et 0,0111...). Ces deux expressions représentent dans la base 10 deux nombres différents, entre lesquels ne peut donc exister aucun autre nombre de l'ensemble P. Ces deux nombres différents sont, par conséquent, les extrémités d'un intervalle contigu à P et ils ont le même correspondant sur le segment 01.

Un ensemble dénombrable pouvant être négligé, on conclut de là que *tout ensemble parfait a la puissance du continu.* (Le théorème est évident pour un ensemble parfait dense, celui-ci contenant un intervalle entier).

67. Fonctions définies par la correspondance précédente. — La correspondance par ordre de grandeur entre les nombres y d'un ensemble parfait non dense P et tous ceux x du segment 01, définit une fonction $y = \varphi(x)$ *discontinue* et *croissante* dans toute portion du segment 01. La fonction est ambiguë en chaque point de discontinuité, où y peut désigner les deux extrémités de l'intervalle contigu correspondant, mais on lève l'ambiguité en choisissant toujours l'extrémité de gauche.

D'autre part, si l'on considère x comme fonction de y, on obtient une fonction *continue* $x = \psi(y)$, stationnaire ou croissante, mais qui possède des intervalles de stationnement entre deux valeurs quelconques de x. On suppose, en effet, x stationnaire chaque fois que y parcourt un intervalle contigu à P.

§ 10. Fonctions considérées dans un ensemble.

68. Définitions. — Une fonction f d'une ou plusieurs variables est définie sur un ensemble E de points (chaque point ayant les valeurs des variables pour coordonnées) si l'on donne la valeur de cette fonction en chaque point de l'ensemble.

Les *bornes supérieure* ou *inférieure* et l'*oscillation* de la fonction f dans E se définissent comme dans le cas d'un intervalle (nº 23).

Soit p un *point-limite* de E. Si E est fermé, ce sera un point de E *non isolé* ; mais nous ne supposons pas que E soit fermé, de sorte que p peut être hors de E. Considérons l'ensemble des points de E dont la distance au point p ne surpasse pas un nombre positif donné δ. L'oscillation de f dans cet ensemble partiel tend vers une limite déterminée (ou reste infinie) quand δ tend vers 0, cette limite (ou l'infini) est *l'oscillation* (*relative à* E) *de f au point-limite p*.

Si cette oscillation est nulle, on dit que f est *continue* (*relativement à* E) *au point p*. — En particulier donc, la fonction f est continue en un point p de E *non isolé*, quand la valeur de f en un point de E qui tend vers p a pour limite la valeur de f au point p.

Si la fonction f est continue (relativement à E) en chaque point non isolé de E, on dit qu'elle est *continue sur* E.

Il résulte de ces définitions, comme au nº 25, que *la somme, le produit, le quotient de fonctions continues sont encore continues* (*en un point ou sur* E), *sauf si une fonction prise comme diviseur s'annule.*

Lorsqu'une fonction n'est pas continue (en un point ou sur E), on dit qu'elle est *discontinue* (en ce point ou sur E, toujours relativement à E).

69. Fonctions discontinues sur un ensemble parfait. — Considérons maintenant un ensemble parfait P, auquel cas les points-limites se confondent avec ceux de l'ensemble.

Pour faciliter le langage, appelons *portion de* P la partie de P comprise dans un domaine (d'autant de dimensions que P) contenant *intérieurement* un point au moins de P. Cette portion de P (contenue dans un intervalle, une aire,...) sera encore un ensemble parfait.

Quand la fonction f est discontinue sur P, deux cas seulement sont possibles :

1º) Quelque petit que soit ε positif, il y a, dans toute portion de P, des points de P où l'oscillation de f (relativement à P) est $< \varepsilon$. On dit, dans ce cas (Dini), que f est *ponctuellement discontinue* sur P.

2º) Il existe une valeur positive de ε et une portion de P, telles que, dans cette portion, l'oscillation de f soit $> \varepsilon$ en chaque point de P. On dit alors que f est *totalement discontinue* sur P.

Il y a lieu de remarquer le théorème suivant :

Si la fonction f est ponctuellement discontinue sur un ensemble parfait P, *il y a dans toute portion de* P *des points où f est continue.*

Pour fixer les idées, considérons un ensemble à deux dimensions. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_n,\ldots$ une suite positive convergeant vers 0. Quand l'oscillation de f est $< \varepsilon$ en un point p, on peut décrire autour de p un cercle, tel que l'oscillation de f dans la portion de P comprise dans ce cercle soit $< \varepsilon$. Donc, puisqu'on peut, par hypothèse, trouver, *dans l'intérieur* de tout cercle, un point p satisfaisant à cette condition, on peut former

une suite illimitée de cercles C_1, C_2,... C_n,..., chacun intérieur à tous les précédents et tels que l'oscillation de f sur la portion de P comprise dans C_n soit $< \varepsilon_n$. Les centres de ces cercles ont au moins un point-limite p intérieur à tous les cercles, l'oscillation en ce point sera inférieure à tous les ε_n (donc nulle) et f sera continue en ce point de P. Comme le même raisonnement s'applique dans toute portion de P, le théorème est démontré.

70. Propriétés des fonctions. — I. *Soit* F *un ensemble fermé ; l'ensemble* E *des points de* F *où l'oscillation (relative à* F*) de la fonction f est* $\geqslant \varepsilon$, *est un ensemble fermé.*

En effet, si p est la limite d'une suite de points p_1, p_2,... où l'oscillation de f est $\geqslant \varepsilon$. p est un point de F où l'oscillation sera évidemment $\geqslant \varepsilon$. Ce point-limite appartient donc à l'ensemble E.

II. *Soit* F *un ensemble borné et fermé. Si, étant donné un nombre positif* ε, *on ne peut pas lui faire correspondre un nombre* δ, *tel que l'oscillation de la fonction f dans toute partie de* F *de diamètre* $< \delta$, *soit* $< \varepsilon$, *il y a au moins un point de* F *où l'oscillation (relative à* F*) de f sera* $\geqslant \varepsilon$.

En effet, étant donnée une suite de nombres positifs δ_1, δ_2,... tendant vers 0, on peut lui faire correspondre une suite de portions de F de diamètres $< \delta_1$, $< \delta_2$,... où l'oscillation est toujours $\geqslant \varepsilon$. Soient p_1, p_2,... des points de F pris dans ces portions successives ; F étant borné, ils ont au moins un point-limite p (appartenant à l'ensemble fermé F). Ce point est intérieur à un domaine aussi petit qu'on veut contenant une infinité de portions successives de F où l'oscillation est $\geqslant \varepsilon$. Elle est donc aussi $\geqslant \varepsilon$ au point p.

71. Fonctions continues. — I. *Une fonction, continue sur un ensemble borné et fermé* F, *est uniformément continue sur l'ensemble.*

Cela veut dire qu'à tout nombre positif ε correspond un nombre δ, tel que l'oscillation de la fonction soit $< \varepsilon$ dans toute portion de F de diamètre $< \delta$, ce qui est un cas particulier du théorème précédent (70, II).

II. *Une fonction qui est continue sur un ensemble borné et fermé* F, *est aussi bornée.*

C'est une conséquence de la propriété précédente.

Soit Δ le diamètre de l'ensemble F ; prenons δ assez petit pour que l'oscillation de la fonction soit $< \varepsilon$ dans toute portion de F de diamètre $< \delta$, puis l'entier n assez grand pour que $n\delta$ soit $> \Delta$; l'oscillation de la fonction dans F sera $< n\varepsilon$.

III. *Une fonction continue sur un ensemble borné et fermé atteint ses bornes inférieure et supérieure dans l'ensemble.* (Même démonstration qu'au nº 27, III).

72. Ensemble d'un seul tenant. — Un ensemble parfait est *d'un seul tenant,* si, étant donnés arbitrairement deux points p et q de l'ensemble et un nombre positif δ, on peut former une suite de points de l'ensemble $p_1\, p_1, p_2, \ldots p_n, q$, allant de p à q et telle que la distance de deux points consécutifs soit $< \delta$ (*).

Avec cette définition, les deux propriétés suivantes s'établissent comme celles V et VI du nº 27 :

Si une fonction continue prend deux valeurs de signes contraires dans un ensemble parfait d'un seul tenant, elle s'annule en un point de l'ensemble.

Une fonction, continue dans un ensemble parfait d'un seul tenant, ne peut passer d'une valeur à une autre dans l'ensemble sans passer aussi par toutes les valeurs intermédiaires.

73. Remarque. — Les définitions et les théorèmes précédents s'appliquent, en particulier, au cas où l'ensemble considéré devient le continu, soit un intervalle, soit une aire, un volume, etc. Les limites de l'intervalle, de l'aire, etc. sont comprises dans l'ensemble s'il est fermé (et, par suite, parfait).

§ 11. Mesure des ensembles linéaires.

La question de la mesure des ensembles de points a été posée de diverses manières. MM. Borel et Lebesgue lui ont donné une solution complètement satisfaisante, que nous allons exposer. Mais nous nous bornerons ici aux ensembles linéaires, renvoyant au tome II pour l'extension aux ensembles de plusieurs dimensions.

74. Lemmes préliminaires. — Définitions. Nous dirons qu'un ensemble de points E est *enfermé au sens étroit* dans un ensemble d'intervalles α, si tout point de E est intérieur au sens étroit à l'un au moins des intervalles α, ou bien s'il existe au moins deux intervalles α contigus dont ce point soit la frontière commune. Dans ce second cas, le point est donc intérieur au sens étroit à l'ensemble de deux intervalles α réunis.

Par contre, les points de E sont *enfermés au sens large* dans l'ensemble des intervalles α, si tout point de E est intérieur, au sens large seulement, à l'un au moins des intervalles α.

Nous commencerons par un lemme fondamental qui, à part une légère variante dans l'énoncé, est dû à M. Borel. Cette variante n'a aucune importance en elle-même, mais elle facilite l'exposition de ce qui suivra.

(*) Un ensemble fermé doué de cette propriété serait parfait.

Lemme I. — *Si les points de l'intervalle* (a, b) *sont enfermés au sens étroit dans un ensemble d'intervalles* α *en nombre infini, on peut extraire de cet ensemble un système d'intervalles* α *en nombre fini jouissant de la même propriété (Tout point de* (a, b) *est intérieur au sens étroit à un intervalle* α *ou à l'ensemble de deux d'entre eux).*

Supposons, par impossible, que la proposition ne s'applique pas à l'intervalle (a, b). Divisons cet intervalle en deux autres par son point milieu ; il y aura au moins une des deux moitiés à laquelle le théorème ne s'appliquera pas non plus. Partageons celle-ci en deux autres parties égales et continuons ainsi de suite. Nous formerons une suite illimitée d'intervalles auxquels le théorème ne s'appliquera pas. Ces intervalles successifs de plus en plus petits, chacun contenu dans les précédents, ont pour limite un point X de l'intervalle (a, b). Ce point X appartiendrait donc à un intervalle aussi petit qu'on veut auquel le théorème ne s'appliquerait pas. Mais ceci est impossible, car X est *intérieur* (au sens étroit) à un intervalle formé d'un ou de deux α et le théorème s'applique évidemment à tout intervalle *intérieur* (au sens étroit) à celui-ci et contenant X.

Lemme II. — *Si tous les points d'un intervalle* (a, b) *sont enfermés au sens étroit dans une infinité dénombrable d'intervalles* $\alpha_1, \alpha_2,\ldots$ *la somme* $\Sigma\alpha$ *des longueurs des intervalles* α *sera supérieure à la longueur de l'intervalle* (a, b).

En effet, tous les points de (a, b) étant intérieurs à un nombre limité des intervalles α en vertu du lemme précédent, la somme de ces intervalles en nombre fini vaut au moins $b - a$, donc la somme de tous les intervalles dépasse $b - a$.

Lemme III. — *Si tous les points d'un intervalle* (a, b) *sont contenus dans une infinité dénombrable d'intervalles d'amplitudes* $\alpha_1, \alpha_2,\ldots$ QUI N'EMPIÈTENT PAS LES UNS SUR LES AUTRES *(mais peuvent avoir une extrémité commune) et qui sont eux-mêmes compris dans l'intervalle* (a, b), *on a*

$$\Sigma\alpha = b - a.$$

D'une part, quel que soit n, on a évidemment $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n < b - a$; donc, à la limite, $\Sigma\alpha \leqslant b - a$.

D'autre part, soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots \varepsilon_n,\ldots$ une suite de quantités positives ayant une somme infiniment petite ε ; désignons par $\beta_1, \beta_2,\ldots$ la suite des intervalles $\alpha_1, \alpha_2,\ldots$ respectivement élargis de $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots$ de chaque côté. Tous les points de (a, b) étant *intérieurs* aux β, on a, par le lemme précédent, $\Sigma\beta \geqslant b - a$. Mais $\Sigma\beta = \Sigma\alpha + 2\varepsilon$; il vient donc $\Sigma\alpha \geqslant b - a - 2\varepsilon$.

Comparons les deux inégalités obtenues, nous en concluons, puisque ε est infiniment petit, que $\Sigma\alpha = b - a$.

Lemme IV. — *Si tous les points d'un ensemble* E *peuvent être enfermés au sens étroit dans un ensemble dénombrable d'intervalles* $\alpha_1, \alpha_2,\ldots$ *ils peuvent l'être au même sens dans un ensemble d'intervalles* $\beta_1, \beta_2,\ldots$ N'EMPIÉTANT PAS *et contenus dans les* α.

On forme, en effet, la suite des intervalles β, en retranchant de l'intervalle α_n, pour $n = 2, 3, \dots$, les parties communes avec les intervalles précédents $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$. On remplace ainsi α_n par un nombre limité d'intervalles β ou bien on le supprime entièrement. Ainsi un point contenu dans α_n au sens étroit, l'est aussi dans l'ensemble *limité* des β formés avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$.

Remarque. — Si les longueurs des intervalles α ont une somme finie $\Sigma\alpha$, il est clair que l'on aura $\Sigma\beta \leqslant \Sigma\alpha$.

LEMME V. — *Si tous les points d'un ensemble* E *sont enfermés dans un ensemble composé de deux infinités dénombrables d'intervalles* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \beta_1\ \beta_2, \dots$ (*les* α *n'empiétant pas les uns sur les autres, ni les* β *non plus*), *si de plus les sommes* $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$ *des longueurs de ces intervalles ont des valeurs finies, on peut enfermer l'ensemble* E *dans un système d'intervalles* γ (*n'empiétant pas*) *contenus dans les* α, β *de telle sorte que l'on ait*

$$\Sigma\alpha + \Sigma\beta = \Sigma\gamma + \Sigma(\alpha\beta).$$

On désigne par $\Sigma(\alpha\beta)$ *la somme des longueurs des parties* $(\alpha\beta)$ *communes aux* α *et aux* β. *On aperçoit d'ailleurs immédiatemment que les* $(\alpha\beta)$ *forment une suite dénombrable d'intervalles n'empiétant pas.*

Pour former une suite d'intervalles γ satisfaisant à l'énoncé, rangeons les α, β, dans une suite unique

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots \alpha_n, \beta_n, \dots$$

et supprimons, comme plus haut, dans chaque intervalle de cette suite les parties communes avec les intervalles qui précèdent. Chaque intervalle α_n ou β_n sera ainsi (s'il n'est pas supprimé) remplacé par un nombre limité d'intervalles γ. En procédant ainsi, nous rencontrerons successivement et une seule fois chaque partie commune $(\alpha\beta)$ qui sera retranchée. On aura donc

$$\Sigma\gamma = \Sigma\alpha + \Sigma\beta - \Sigma(\alpha\beta).$$

LEMME VI. — *Si tous les points de l'intervalle* (a, b) *sont enfermés dans deux infinités dénombrables d'intervalles* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \beta_1, \beta_2, \dots$ *contenus dans* (a, b), *les* α *n'empiétant pas ni les* β *non plus ; on a*

$$\Sigma\alpha + \Sigma\beta = (b - a) + \Sigma(\alpha\beta),$$

la somme $\Sigma(\alpha\beta)$ *s'étendant à l'ensemble dénombrable des intervalles communs aux* α *et aux* β, *lesquels n'empiètent pas non plus.*

C'est la conséquence du lemme précédent, où il faut remplacer $\Sigma\gamma$ par $b - a$, en vertu du lemme III [tous les points de (a, b) étant contenus dans les γ et tous les γ dans (a, b)].

75. Mesures extérieure et intérieure d'un ensemble. Ensembles mesurables. — Dans ce qui suit, nous ne considérons que des ensembles bornés et contenus dans un même intervalle (a, b). Un ensemble étant désigné par E, nous appel ons CE son complémentaire relativement à l'intervalle (a, b), c'est-à-dire que CE sera formé des points de (a, b) non contenus dans E.

See Errata

Soit E un ensemble ; nous pouvons enfermer ses points dans un ensemble fini ou une infinité dénombrable d'intervalles α_1, α_2,... Soit $\Sigma\alpha$ la somme des longueurs de ces intervalles. Par définition, la *mesure extérieure* m_e E est la borne inférieure de toutes les sommes $\Sigma\alpha$ possibles. D'après cela, quelque petit que soit le nombre positif ε, pour tout ensemble E, on peut trouver un système d'intervalles α_1, α_2,... contenant tous les points de E et tel qu'on ait

$$m_e \text{E} \leqslant \Sigma\alpha < m_e \text{E} + \varepsilon.$$

Dans cette définition de la mesure extérieure, il est d'ailleurs indifférent de dire que l'ensemble est enfermé *au sens étroit* ou bien *au sens large*, que les intervalles *empiètent* ou *n'empiètent pas* (Lemme IV).

Soient maintenant CE le complémentaire de E (relativement à l'intervalle (a, b) et m_e (CE) la mesure extérieure de cet ensemble. Par définition, la *mesure intérieure* de E est la quantité

$$m_i \text{E} = (b - a) - m_e (\text{CE}).$$

Cette quantité ne peut être négative, car l'intervalle (a, b) contient CE et, par suite, $b - a$ est au moins égal à m_e (CE).

D'autre part, la mesure intérieure de E ne peut surpasser sa mesure extérieure. En effet, enfermons (au sens étroit) E dans un système d'intervalles α et CE dans un système d'intervalles β, les points de (a, b) seront enfermés au même sens dans les α, β. Donc, par le lemme II.

$$\Sigma\alpha + \Sigma\beta \geqslant (b - a) ;$$

et, en faisant tendre $\Sigma\alpha$ et $\Sigma\beta$ vers leurs limites inférieures.

$$m_e \text{E} + m_e (\text{CE}) \geqslant b - a,$$
$$m_e \text{E} \geqslant m_i \text{E}.$$

Ces définitions sont évidemment telles qu'un ensemble ne peut être de mesure (intérieure ou extérieure) moindre qu'une de ses parties.

Lorsque les mesures extérieure et intérieure d'un ensemble E sont égales, cet ensemble est *mesurable* et sa mesure, mE, est la valeur commune de m_e E et m_i E. Il résulte immédiatement de là que, si un ensemble E est mesurable, son complémentaire l'est aussi.

76. Opérations sur les ensembles. — On peut effectuer sur des ensembles donnés diverses opérations :

1°) On peut réunir tous les points qui appartiennent à plusieurs ou à une infinité dénombrable d'ensembles E_1. E_2,... Cette opération peut être considérée comme une *addition* et l'*ensemble-somme* se désigne par

$$\text{E}_1 + \text{E}_2 + \ldots$$

2°) On peut retrancher d'un ensemble E_1 ceux de ces points qui appartiennent à un ensemble E_2. Cette opération peut être considérée comme une *soustraction* et l'*ensemble-différence* se désigne par

$$\text{E}_1 - \text{E}_2.$$

3°) On peut prendre la partie commune à plusieurs ou à une infinité dénombrable d'ensembles E_1, E_2,... Cette opération correspond à certains égards à la *multiplication*. Nous représenterons l'ensemble commun par

$$E_1\ E_2 \ldots$$

L'addition et la multiplication ainsi définies sont des opérations *associatives* et *commutatives* et la multiplication est *distributive* vis-à-vis de l'addition et de la soustraction, c'est-à-dire que

$$(E_1 \pm E_2)\, E_3 = E_1\, E_3 \pm E_2\, E_3.$$

La vérification est immédiate.

Par contre, les propriétés générales des opérations ne s'étendent pas à la soustraction. En particulier, on peut bien poser

$$(E - E_1) + (E_2 - E_3) = (E + E_2) - E',$$

mais E' ne contient qu'une partie de $(E_1 + E_3)$, à savoir les points de E_1 contenus dans E sans l'être dans $(E_2 - E_3)$ et ceux de E_3 contenus dans E_2 sans l'être dans $(E - E_1)$. Cette remarque nous servira tout à l'heure (n° 78, I).

Nous allons montrer que les opérations précédentes, étant effectuées sur des ensembles mesurables, conduisent a de nouveaux ensembles mesurables. A cet effet, nous allons faire connaître au n° suivant un caractère distinctif des ensembles mesurables. Mais nous avons d'abord une remarque à faire :

Si deux ensembles E_1 et E_2 sont de mesure (extérieure) $< \varepsilon$, l'ensemble $E_1 + E_2$ sera de mesure (extérieure) $< 2\varepsilon$. D'autre part, quel que soit E_3, les ensembles $E_1 - E_3$ et $E_1\, E_3$ contenus dans E_1 seront *a fortiori* de mesure (extérieure) $<\varepsilon$.

77. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *soit mesurable, est que, quelque petit que soit* ε *positif, l'ensemble* E *puisse se décomposer comme il suit*

$$E = \mathcal{E} + e' - e'',$$

$\mathcal{E}$ *désignant l'ensemble d'un nombre limité d'intervalles,* e' *et* e'' *deux ensembles de mesures (extérieures)* $< \varepsilon$. *Alors la mesure de* E *est comprise entre les deux limites* $m\mathcal{E} \pm \varepsilon$.

La condition est nécessaire. Montrons, en effet, que si E est mesurable, il admet la décomposition indiquée. Pour cela, enfermons E (mesurable) dans une infinité dénombrable d'intervalles α n'empiétant pas et CE dans des intervalles β n'empiétant pas de manière que l'on ait

$$\Sigma\alpha + \Sigma\beta < m\,E + m\,CE + \varepsilon = b - a + \varepsilon.$$

On a, d'autre part, par le lemme VI (n° 74),

$$\Sigma\alpha + \Sigma\beta = b - a + \Sigma\,(\alpha\beta),$$

d'où, en comparant, $\Sigma\,(\alpha\beta) < \varepsilon$.

Soit maintenant $\mathcal{E}$ l'ensemble d'un nombre suffisant d'intervalles α pour que l'ensemble e des intervalles restants soit de mesure $< \varepsilon$. On a

$$E = \mathcal{E} + eE - \mathcal{E}(CE).$$

Mais eE est un ensemble e' de mesure $< \varepsilon$ et $\mathcal{E}(CE)$ est un ensemble e'' contenu dans les $(\alpha\beta)$ donc aussi de mesure $< \varepsilon$, ce qui prouve la proposition.

En second lieu, la condition est suffisante, car, si elle est remplie, E et CE étant respectivement contenus dans $\mathcal{E} + e'$ et $C\mathcal{E} + e''$, on a les inégalités :

$$m_e\, E < m\mathcal{E} + \varepsilon, \qquad m_e\, CE < mC\mathcal{E} + \varepsilon,$$

et, en retranchant la seconde de $b - a = b - a$,

$$m_i E > m\,\mathcal{E} - \varepsilon.$$

Donc les mesures intérieure et extérieure de E sont comprises entre les deux limites $m\,\mathcal{E} \pm \varepsilon$ aussi rapprochées qu'on veut et, par conséquent, sont égales. On voit, en même temps, que mE est compris entre ces mêmes limites.

On peut caractériser la décomposition requise dans le théorème précédent en disant que *tout ensemble mesurable se compose, à deux infiniment petits près, d'un nombre fini d'intervalles.*

78. Théorèmes relatifs aux opérations sur les ensembles mesurables. — Théorème I. — *Si les ensembles* E_1 *et* E_2 *sont mesurables, il en est de même pour les ensembles :*

$$E_1 + E_2, \qquad E_1 E_2, \qquad E_1 - E_2.$$

Mettons, en effet, E_1 et E_2 sous la forme indiquée dans le théorème précédent :

$$E_1 = \mathcal{E}_1 + e_1' - e_1'', \qquad E_2 = \mathcal{E}_2 + e_2' - e_2'',$$

on aura

$$E_1 + E_2 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + (e_1' + e_2') - e'',$$

où e'' est contenu (n° 76) dans $(e_1'' + e_2'')$. Or $(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)$ est formé d'un nombre limité d'intervalles, tandis que $(e_1' + e_2')$ et $(e_1'' + e_2'')$ sont de mesures $< 2\varepsilon$, donc $E_1 + E_2$ est mesurable par le théorème précédent.

Les deux autres résultats se ramènent au précédent par la considération du complémentaire. On a, en effet,

$$C(E_1 E_2) = CE_1 + CE_2, \qquad C(E_1 - E_2) = CE_1 + E_2.$$

Théorème II. — *Si les deux ensembles* E_1 *et* E_2 *sont mesurables et sans point commun, on a*

$$m(E_1 + E_2) = m\,E_1 + m\,E_2.$$

La décomposition de $E_1 + E_2$ indiquée dans la démonstration précédente prouve (n° 77) que la mesure de $E_1 + E_2$ est la limite, pour ε infiniment petit, de $m(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)$. Mais, pour un nombre limité d'intervalles, on a, sans difficulté,

$$m(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = m\,\mathcal{E}_1 + m\,\mathcal{E}_2 - m(\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2).$$

Comme $m\mathcal{E}_1$ et $m\,\mathcal{E}_2$ tendent vers $m\,E_1$ et $m\,E_2$, il reste à montrer que $m(\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2)$ tend vers 0. Or $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont respectivement contenus dans $E_1 + e_1''$ et $E_2 + e_2''$, donc $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ l'est dans

$$(E_1 + e_1'')(E_2 + e_2'') = E_1\,E_2 + E_1\,e_2'' + (E_2 + e_2'')\,e_1'',$$

et *a fortiori* dans $(e_2'' + e_1'')$ puisque $E_1\,E_2$ est nul. Donc $m\,\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2 < 2\varepsilon$.

Corollaire. — *Si* E_1 *et* E_2 *sont mesurables et* E_2 *contenu dans* E_1, *on a*

$$m(E_1 - E_2) = m\,E_1 - m\,E_2.$$

Cette équation revient, en effet, à celle que nous venons d'établir, en écrivant

$$m(E_1 - E_2) + m\,E_2 = m\,E_1.$$

Théorème III. — *Soit* $E_1, E_2,\ldots$ *une infinité dénombrable d'ensembles mesurables contenus dans l'intervalle* (a, b); *soit ensuite* E *l'ensemble-somme* $E_1 + E_2 + \ldots$; *l'ensemble* E *est mesurable. De plus, si les ensembles sont sans points communs, on a*

$$m\,E = m\,E_1 + m\,E_2 + \ldots$$

Supposons d'abord les ensembles sans points communs.

Posons

$$\begin{aligned} S_n &= E_1 + E_2 + \cdots + E_n \\ R_n &= E_{n+1} + E_{n+2} + \cdots \end{aligned} \qquad \text{d'où} \qquad E = S_n + R_n.$$

On aura, en observant d'abord que E contient S_n, puis en appliquant le théorème I,

$$m_i\,E > m\,S_n = m\,E_1 + m\,E_2 + \cdots + m\,E_n,$$

ce qui prouve que la série positive $\Sigma m E_n$ est convergente. Prenons donc n assez grand pour qu'on ait, ε positif étant donné,

$$m\,E_{n+1} + m\,E_{n+2} + \cdots < \varepsilon,$$

et enfermons, pour $p = 1, 2, 3,\ldots$ l'emsemble E_{n+p} dans un système d'intervalles α dont la somme soit $< m\,E_{n+p} + \frac{\varepsilon}{2^p}$. Alors l'ensemble $R_n = E_{n+1} + E_{n+2} + \cdots$ est enfermé dans un système d'intervalles α, dont la somme est moindre que

$$\left(m\,E_{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(m\,E_{n+2} + \frac{\varepsilon}{2^2}\right) + \cdots < 2\varepsilon.$$

On en conclut

$$m_e\,E < m\,S_n + 2\varepsilon.$$

Comparons avec l'inégalité relative à m_iE et passons à la limite pour $\varepsilon = 0$; on en conclut le résultat énoncé :

$$m_e \mathrm{E} = m_i \mathrm{E} = m\,\mathrm{E} = \lim (m\,\mathrm{S}_n) = m\,\mathrm{E}_1 + m\,\mathrm{E}_2 + \cdots$$

Si, en second lieu, les ensembles E_n ont des points communs, l'ensemble E sera encore mesurable, car on peut écrire

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + (\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1) + (\mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1) + \cdots,$$

ce qui ramène au cas précédent, en vertu du théorème II.

Théorème IV. — *Si d'un ensemble mesurable* E *on retranche tous les points qui appartiennent à une infinité dénombrable d'ensembles mesurables* E_1, E_2 ..., *tous les ensembles* E, E_1, E_2,... *étant contenus dans un intervalle* (a, b), *l'ensemble restant* $\mathrm{E} - \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2 - \ldots$ *est encore mesurable. De plus, si* E_1, E_2,... *sont sans points communs et tous contenus dans* E, *on a*

$$m(\mathrm{E} - \mathrm{E}_1 - \mathrm{E} - \cdots) = m\,\mathrm{E} - m\,\mathrm{E}_1 - m\,\mathrm{E}_2 - \cdots$$

D'abord l'ensemble $\mathrm{E}' = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \cdots$ est mesurable par le théorème III, donc $\mathrm{E} - \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2 - \cdots$ ou $\mathrm{E} - \mathrm{E}'$ l'est par le théorème II.

Ensuite, si E_1, E_2,... sont sans points communs, on a, par le théorème III,

$$m\,\mathrm{E}' = m\,\mathrm{E}_1 + m\,\mathrm{E}_2 + \cdots$$

et, par le corollaire du théorème I,

$$m(\mathrm{E} - \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2 - \cdots) = m(\mathrm{E} - \mathrm{E}') = m\,\mathrm{E} - m\,\mathrm{E}',$$

ce qui prouve la seconde partie du théorème énoncé.

Théorème V. — *Soit* E_1, E_2,... *une infinité dénombrable d'ensembles mesurables, leur partie commune* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1\,\mathrm{E}_2\ldots$ *est mesurable.*

Ce théorème se ramène au théorème IV en observant que

$$\mathrm{C\,E} = \mathrm{C\,E}_1 + \mathrm{C\,E}_2 + \cdots$$

Théorème VI. — *Soit* E_1, E_2... *une infinité dénombrable d'ensembles mesurables dont chacun contient tous les précédents et qui sont tous contenus dans un intervalle* (a, b), *on a*

$$m(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \cdots) = \lim_{n=\infty} (m\,\mathrm{E}_n).$$

On peut, en effet, poser, dans cette hypothèse,

$$\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \cdots = \mathrm{E}_1 + (\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1) + (\mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_2) + \cdots$$

et il vient, par les théorèmes III et I (corollaire),

$$\begin{aligned} m(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \cdots) &= m\,\mathrm{E}_1 + m(\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1) + m(\mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_2) + \cdots \\ &= m\,\mathrm{E}_1 + (m\,\mathrm{E}_2 - m\,\mathrm{E}_1) + (m\,\mathrm{E}_3 - m\,\mathrm{E}_2) + \cdots \\ &= \lim (m\,\mathrm{E}_n). \end{aligned}$$

THÉORÈME VII. — *Inversement, soit* E_1, E_2,.. *une infinité dénombrable d'ensembles mesurables dont chacun est contenu dans tous les précédents et qui sont tous contenus dans un intervalle* (a, b), *on a*

$$m(E_1 E_2 \ldots) = \lim m(E_n).$$

On a, en effet, dans cette hypothèse,

$$C(E_1 E_2 \ldots) = C E_1 + C E_2 + \cdots$$

Donc il vient, par le théorème précédent,

$$m C(E_1 E_2 \ldots) = \lim m(C E_n)$$

et, en retranchant les deux membres de $(b - a)$,

$$m(E_1 E_2 \ldots) = \lim (m E_n).$$

79. Construction d'ensembles mesurables. Ensembles mesurables B. — Un ensemble qui se réduit à un seul point est évidemment mesurable et a pour mesure zéro. D'autre part, un ensemble qui se réduit à un intervalle (avec ou sans les extrémités) est évidemment mesurable et a pour mesure la longueur de l'intervalle.

En combinant entre eux les points et les intervalles par addition et soustraction ou en prenant l'ensemble commun à une suite d'ensembles donnés, on obtient des ensembles de plus en plus complexes et qui sont encore mesurables en vertu des théorèmes du nº précédent. Ce sont ceux-là qui ont été particulièrement considérés par M. Borel. C'est pourquoi on les appelle les *ensembles mesurables* B.

Les ensembles mesurables B sont les plus importants des ensembles mesurables. Quand on connaît leur mode de construction, on peut en même temps déterminer leur mesure en utilisant, à chaque opération consécutive, le théorème correspondant du numéro précédent.

Un *ensemble dénombrable* s'obtient par l'addition d'une infinité dénombrable de points. C'est donc un ensemble mesurable B et sa mesure est nulle, en vertu du théorème III.

Un *ensemble parfait* s'obtient en soustrayant d'un intervalle (a, b) une infinité dénombrable d'intervalles distincts α_1, α_2,..... C'est donc un ensemble mesurable B et sa mesure est $(b - a) - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots$, en vertu du théorème IV.

Un *ensemble fermé* est la somme d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable. C'est donc un ensemble mesurable B et sa mesure est celle de l'ensemble parfait qu'il contient, en vertu du théorème I.

80. Théorème. — *Si la mesure extérieure de l'ensemble* E *est égale à* k, E *est contenu dans un ensemble* E' *mesurable* B *et de même mesure* k. — *Réciproquement, si* m_i E $= k$, E *contient un ensemble* E'' *mesurable* B *et de même mesure* k.

Les deux théorèmes se ramènent l'un à l'autre par la considération des ensembles complémentaires. Démontrons donc le théorème direct.

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ une suite de quantités positives ayant pour limite 0. Nous pouvons enfermer E dans un ensemble E (ε_n), mesurable B, formé d'intervalles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ n'empiétant pas et tel que

$$m\,\mathrm{E}(\varepsilon_n) = \Sigma\alpha < k + \varepsilon_n.$$

Alors E est aussi enfermé dans l'ensemble mesurable B :

$$\mathrm{E}' = \mathrm{E}(\varepsilon_1)\,\mathrm{E}(\varepsilon_2)\ldots\mathrm{E}(\varepsilon_u)\ldots$$

et l'on a

$$m\,\mathrm{E}' \leqslant m\,\mathrm{E}(\varepsilon_n) < k + \varepsilon_n.$$

Donc (ε_n étant infiniment petit) $m\,\mathrm{E}' \leqslant k$ (donc $= k$).

Remarque. — En particulier, si E est mesurable, il est contenu dans un ensemble E′ et contient un ensemble E″, tous deux mesurables B et de même mesure que lui.

81. Emsembles-limites (Complets ou restreints). — Soit $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$ une infinité dénombrable d'ensembles. M. Borel appelle *ensemble-limite complet* de cette suite, l'ensemble E formé des points qui appartiennent à une infinité d'entre eux. Il appelle *ensemble-limite restreint* de la même suite, l'ensemble R des points qui appartiennent à tous les ensembles E_n à partir d'une valeur suffisamment grande de n (qui peut d'ailleurs dépendre du point considéré).

Les ensembles-limites peuvent s'exprimer à l'aide des opérations étudiées précédemment. On a, en effet,

$$\mathrm{R} = (\mathrm{E}_1\,\mathrm{E}_2\,\mathrm{E}_3\ldots.) + (\mathrm{E}_2\,\mathrm{E}_3\ldots) + (\mathrm{E}_3\ldots) + \ldots$$

car un point de R appartient à tous les termes du second membre à partir d'un certain rang ; et, réciproquement, un point qui appartient au second membre appartient à l'un de ses termes, donc aussi à R.

D'autre part, on a

$$\mathrm{E} = (\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3 + \cdots)(\mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3 + \cdots)(\mathrm{E}_3 + \cdots)\cdots,$$

car un point de E appartient à tous les facteurs du second membre ; et, réciproquement, un point qui appartient à tous les facteurs du second membre appartient à une infinite de E_n, donc à E.

Ces relations prouvent d'abord que, si les ensembles de la suite sont mesurables, il en est de même des ensembles-limites E et R. Mais elles fournissent des renseignements sur les mesures de E et de R. On peut, en effet, énoncer les théorèmes suivants, qui s'en déduisent :

Théorème I. — *Si, parmi les ensembles mesurables* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$, *tous compris dans un intervalle fini* (a, b), *il y en a une infinité de mesure* $\geqslant k$, *l'ensemble-limite complet* E *aura une mesure* $\geqslant k$.

En effet, en retranchant de la suite une partie des ensembles E_n, on ne peut que réduire l'ensemble-limite complet E. On peut donc sup-

poser dans la démonstration tous les ensembles de mesure $\geqslant k$. Appliquant alors le théorème VII du nº 78 à l'expression de E ci-dessus, on obtient

$$m\,E = \lim m\,(E_n + E_{n+1} + \cdots) \geqslant \lim m\,E_n \geqslant k.$$

Théorème II. — *Si, parmi les ensembles mesurables* E_1, E_2,... *tous compris dans* (a, b), *il y en a une infinité de mesure* $\leqslant k$... *l'ensemble-limite restreint* R *aura une mesure* $\leqslant k$.

En effet, en retranchant de la suite une partie des ensembles E_n, on ne peut qu'augmenter l'ensemble-limite restreint R. On peut donc supposer dans la démonstaation tous les ensembles de mesures $\leqslant k$. Appliquant alors le théoreme VII du nº 77 à l'expression de R, on obtient

$$m\,R = \lim m\,(E_n\,E_{n+1} \cdots) \leqslant \lim m\,E_n \leqslant k.$$

§ 12. Fonctions mesurables d'une variable (*).

82. Fonctions mesurables. — Soit $f(x)$ une fonction univoque de x dans un ensemble F, sa valeur peut être infinie mais de signe déterminé. Soient ensuite A et B deux nombres fixes $(A < B)$. Nous désignerons respectivement par les notations :

$$E(A < f < B), \qquad E(f > A), \qquad E(f = A),$$
$$E(A \leqslant f \leqslant B), \qquad E(f \geqslant A), \qquad \text{etc.}$$

les ensembles des points de F où la fonction $f(x)$ satisfait à la condition indiquée entre parenthèses. Ainsi le premier ensemble est celui des points de F où $f(x)$ est $> A$ mais $< B$.

Ceci posé, nous dirons, avec M. Lebesgue, que cette fonction est *mesurable dans l'ensemble* F, si l'ensemble

$$E(f > A)$$

est mesurable quel que soit A. — Si, de plus, cet ensemble est mesurable B, nous dirons que la fonction est *mesurable* B.

Il suit evidemment de cette définition que si une fonction est mesurable dans deux ensembles F_1 et F_2, elle est mesurable dans l'ensemble-somme $F_1 + F_2$.

Si la fonction $f(x)$ est mesurable, l'ensemble $E(f \leqslant A)$ est mesurable, l'ensemble $E(A < f \leqslant B)$ également (comme différence de deux ensembles mesurables) ; enfin l'ensemble $E(f = A)$ est aussi mesurable, car c'est la partie commune à l'infinité dénombrable des ensembles

$$E\left(A - \frac{1}{n} < f \leqslant A + \frac{1}{n}\right), \qquad n = 1, 2, 3\ldots..$$

Donc les ensembles $E(f \geqslant A)$, $E(A \leqslant f \leqslant B)$, $E(A < f < B)$, qui

(*) Pour celles de plusieurs variables, voir le tome II.

ne diffèrent d'autres qui précèdent que par l'addition ou la soustraction d'un ensemble mesurable, sont mesurables aussi.

Remarque. — On peut aussi bien définir une fonction mesurable par la condition que l'un, toujours le même, des deux ensembles :

$$E(f \geqslant A), \quad E(f < A),$$

soit mesurable quelque soit A, car un raisonnement calqué sur le précédent montrerait que tous les ensembles rencontrés ci-dessus sont encore mesurables. Il en résulte évidemment que, si f est mesurable, $-f$ l'est aussi.

Toute fonction continue dans un ensemble fermé F, *est mesurable* (B) *dans cet ensemble,* car l'ensemble $E(f \geqslant A)$ étant fermé, est mesurable (B).

83. Opérations sur les fonctions mesurables. — I. *La somme et la différence de deux fonctions finies et mesurables dans un ensemble* F, *sont des fonctions mesurables dans* F.

En effet, soient f et φ deux fonctions mesurables. Je dis que $f + \varphi$ est mesurable, c'est-à-dire que l'ensemble $E = E(f + \varphi > A)$ est mesurable. En effet, cet ensemble est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles mesurables :

$$E(f > r).\, E(\varphi > A - r),$$

formés des points communs à $E(f > r)$ et $E(\varphi > A - r)$, quand on donne à r toutes les valeurs rationnelles positives et négatives (car, si $f + \varphi$ est $> A$, on peut trouver un nombre rationnel $r < f$ tel qu'on ait encore $r + \varphi > A$). Donc E est mesurable (nº 78, III).

Le théorème se démontre pour une différence en remplaçant φ par $-\varphi$ qui est mesurable avec φ (nº précédent).

II. *Le produit de deux fonctions finies et mesurables dans* F *est mesurable dans* F.

Toute fonction mesurable f est la différence $f_1 - f_2$ de deux fonctions mesurables jamais négatives (f_1 étant égal à f aux points où f est positif et à 0 ailleurs, — f_2 égal à f aux points où f est négatif et à 0 ailleurs). Donc, en vertu de la propriété précédente, il suffit de faire la démonstration pour deux fonctions f et φ jamais négatives. Le raisonnement est alors analogue au précédent. Il faut prouver que, si $A > 0$, l'ensemble $E = E(f\varphi > A)$ est mesurable, ce qui résulte de ce que cet ensemble est la somme de tous les ensembles $E(f > r)\, E\left(\varphi > \frac{A}{r}\right)$ quand on donne à r toutes les valeurs rationnelles positives.

III. *L'inverse d'une fonction mesurable dans* F *et qui ne s'annule pas est mesurable.* On a, en effet,

$$E\left(\frac{1}{f} > A\right) = E\left(f < \frac{1}{A}\right), \text{ si } f \text{ et } A \text{ sont positifs ;}$$

$$E\left(0 > \frac{1}{f} > A\right) = E\left(0 > f > \frac{1}{A}\right), \text{ si } f \text{ et } A \text{ sont négatifs.}$$

IV. *Le quotient des deux fonctions finies et mesurables dans* F *est mesurable dans* F, *pourvu que le diviseur ne s'annule pas.*

Cette propriété est la conséquence des deux précédentes.

84. Limites de fonctions mesurables. — Théorème I. *Si une suite de fonctions mesurables* $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$ *converge vers une limite finie ou infinie dans un ensemble* F, *la fonction-limite* f *est mesurable dans* F.

Donnons-nous un nombre positif ε. Tout point de l'ensemble

$$E = E(f \geqslant A)$$

appartient évidement, pour n suffisamment grand, à l'ensemble mesurable

$$E(n, \varepsilon) = E(f_n > A - \varepsilon).$$

Donc tout point de E appartient à l'*ensemble-limite restreint* E_ε de la suite $E(1, \varepsilon)$, $E(2, \varepsilon)$, $E(3, \varepsilon)$......, lequel est mesurable ; et cela, quelque petit que soit ε.

Réciproquement, tout point exclu de E est exclu de $E(f > A - \varepsilon)$ pour ε assez petit ; il est alors exclu de E_ε, car il l'est de $E(n, \varepsilon)$ pour n assez grand.

Donc l'ensemble E est l'*ensemble-limite restreint* de la suite des ensembles E_ε obtenue en donnant à ε une suite de valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n, \dots$ tendant vers 0 : E est mesurable.

Théorème II. — *Les limites d'indétermination (plus grande et plus petite limites) d'une suite de fonctions mesurables* $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$ *sont mesurables dans* F.

En effet, soit, pour chaque valeur de x, $\psi_{m,n}(x)$ la fonction égale à la plus grande des $m + n + 1$ fonctions :

$$f_m, \quad f_{m+1}, \dots \quad f_{m+n}.$$

C'est une fonction mesurable dans F, car on a

$$E(\psi_{m,n} > A) = \sum_{k=0}^{n} E(f_{m+k} > A).$$

Or la plus grande limite de la suite $f_1, f_2, \dots$ est la limite de $\psi_{m,n}$, quand n d'abord et m ensuite tendent vers l'infini : elle est donc mesurable par le théorème I. (Démonstration analogue pour la plus petite limite).

Remarque. — Les fonctions continues étant mesurables (n° 82), les limites et les limites d'indétermination de fonctions continues le seront aussi.

85. Théorème sur la convergence. — *Soit* $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$ *une suite de fonctions mesurables qui converge vers une limite finie* $f(x)$ *dans un ensemble mesurable* E ; *soient ensuite* ε *un nombre positif arbitraire et* E_n *l'ensemble des points de* E *où l'on a*

$$| f - f_n | \geqslant \varepsilon.$$

See Errata

Je dis qu'à tout nombre positif δ si petit qu'il soit, on peut faire correspondre un nombre positif N, *tel que l'on ait*

$$m\,E_n < \delta, \quad \text{si } n \geqslant N.$$

En effet, si par impossible cette condition ne se réalisait pas, il y aurait une infinité de E_n de mesures $\geqslant \delta$. Alors l'ensemble-limite complet des E_n aurait une mesure $\geqslant \delta$ (nº 81, I) : il renfermerait donc certainement des points. Soit x l'un d'eux, il y aurait une infinité de valeurs de n pour lesquelles

$$| f(x) - f_n(x) | \geqslant \varepsilon,$$

auquel cas, $f_n(x)$ n'aurait pas pour limite $f(x)$.

§ 13. Fonctions (d'une variable) à variation bornée. Fonctions absolument continues.

86. Définition des fonctions à variation bornée. — Soient $y = f(x)$ une fonction de x, univoque et bornée dans un intervalle fini (a, b), et X un point de cet intervalle. Donnons à x une suite de valeurs croissantes $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1} = X$; soient $y_1, y_2, \ldots y_{n+1} = Y$ les valeurs correspondantes de y. Faisons la somme des différences successives de y ; nous aurons

$$(1) \qquad \sum_1^n (y_{k+1} - y_k) = Y - y_1 = p - n,$$

p désignant la somme des différences positives et $-n$ celle des différences négatives. Désignons encore par t la somme des différences absolues ; nous aurons

$$(2) \qquad t = \sum_1^n | y_{k+1} - y_k | = p + n.$$

Les valeurs extrêmes a et X restant fixes, les trois sommes p, n, t dépendent encore du nombre et de la position des valeurs intermédiaires. Faisons varier ces deux éléments de toutes les manières possibles ; si l'une des trois sommes est bornée, les deux autres sommes le seront aussi, en vertu des équations (1) et (2). Quand il en sera ainsi, nous dirons que y est une *fonction à variation bornée* entre a et X (C. Jordan).

Dans cette hypothèse, on peut choisir successivement les points intermédiaires de manière que p s'approche indéfiniment de sa borne supérieure P. Les équations (1) et (2) montrent que n et t tendront en même temps vers leurs bornes supérieures N et, T et ces équations elles-mêmes deviendront, à la limite,

$$Y - y_1 = P - N, \qquad T = P + N.$$

Cette dernière quantité T s'appelle la *variation totale* de y dans l'intervalle (a, X).

Nous allons faire connaître maintenant quelques propriétés importantes des sommes p, n, t et de leurs bornes supérieures P, N et T.

87. Théorèmes sur les fonctions à variation bornée. — LEMME. — *Si l'on ajoute une nouvelle valeur intermédiaire* ξ *entre* x_k *et* x_{k+1}, *la somme* t *peut augmenter mais non décroître ; elle augmente d'ailleurs tout au plus du double de l'oscillation de* y *dans l'intervalle* (x_k, x_{k+1}).

Soit η la valeur de y au point ξ ; l'adjonction de ce point remplace dans t le terme unique $|y_{k+1}-y_k|$ par deux autres, dont la somme est au moins égale, $|y_{k+1}-\eta|+|\eta-y_k|$. D'autre part, chacun de ces nouveaux termes est au plus égal à l'oscillation de y entre x_k et x_{k+1}. Donc t ne peut croître de plus du double de cette limite.

THÉORÈME I. — *Si* y *est continue et à variation bornée, les sommes* p, n, t *ont respectivement* P, N *et* T *pour limites quand les valeurs intermédiaires de* x *se rapprochent indéfiniment les unes des autres.*

Le théorème, vrai pour une des trois sommes, le sera pour les deux autres. Démontrons-le pour t seulement.

Pour cela, il faut montrer que la somme t relative à un système S de points intermédiaires surpasse $T-2\varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif donné 2ε, pourvu que les intervalles de ces points soient assez petits.

On peut d'abord, par définition de T, trouver un système de points S′ tel que la somme correspondante t' vérifie la condition $t'>T-\varepsilon$. Soit ν le nombre des points de S′. Je dis que le système de points S fournira une somme $t>T-2\varepsilon$, pourvu que ses intervalles soient assez petits pour que l'oscillation de y soit $<\varepsilon:\nu$ dans chacun d'eux. Considérons, en effet, un troisième système de points S″, formé de la réunion de ceux de S et S′, et soit t'' la somme correspondante. Comme il faut ajouter ν points au plus pour passer de S à S″, il faut ν accroissements au plus, tous moindres que $\varepsilon:\nu$ (Lemme précédent), pour passer de t à t''. On a donc $t+\varepsilon>t''$. Mais, d'autre part, S″ se forme aussi par l'adjonction de nouveaux points à S′. Donc $t''>t'$ et *a fortiori* $t''>T-\varepsilon$. Nous obtenons donc l'inégalité à démontrer $t+\varepsilon>T-\varepsilon$.

THÉORÈME II. — *Si* y *est à variation bornée dans l'intervalle* (a, b), *elle est de même nature dans toute portion* (a, X) *de* (a, b) *et les quantités* P, N, T *sont des fonctions stationnaires ou croissantes de* X.

Donnons à x une suite de valeurs intermédiaires entre a et b et prenons X au nombre de ces valeurs. Considérons la suite des valeurs correspondantes de y. La somme des différences absolues de ces valeurs entre a et X sera moindre que la somme analogue entre a et b. Donc, si cette dernière est bornée, la première l'est aussi et y est à variation bornée dans l'intervalle (a, X). Le même raisonnement

prouve que T, qui est la borne de la somme précédente, ne peut pas diminuer quand X augmente. La démonstration est analogue pour P et N.

THÉORÈME III. — *Si y est à variation bornée dans l'intervalle (a, X) et qu'on partage cet intervalle en deux autres par un point c, la variation totale* T *de y dans l'intervalle (a, X) est la somme des variations totales* T_1 *et* T_2 *dans (a, c) et dans (c, X).*

En effet, on peut former une somme t relative à l'intervalle (a, X) et infiniment voisine de T ; d'ailleurs on peut supposer que c soit pris comme point de subdivision, car on augmente t en l'ajoutant. Mais alors t est la somme de deux sommes analogues t_1 et t_2 relatives aux intervalles (a, c) et (c, X) donc t est $< T_1 + T_2$ et sa limite $T \leqslant T_1 + T_2$.

Inversement, on peut former deux sommes t_1 et t_2 infiniment voisines de T_1 et de T_2 respectivement, alors $t_1 + t_2$ est une somme $t < T$, donc $T_1 + T_2 \leqslant T$.

Comparant, on voit que $T = T_1 + T_2$.

THÉORÈME IV. — *Si la fonction $y = f(x)$, supposée à variation bornée, est continue en un point* X, *les sommes-limites* P, N *et* T *sont des fonctions continues de* X *en ce point.*

La continuité d'une des trois sommes entraine celle des deux autres. Il suffit donc de prouver celle de T.

Montrons d'abord que l'oscillation ω de T à droite du point X est nulle.

Soit τ la variation totale de y dans l'intervalle $(X, X + \delta)$; eu égard au théorème précédent, ω est la limite de τ quand δ tend vers 0 ; par suite, on a $\omega \leqslant \tau$.

Donnons-nous maintenant un nombre positif arbitraire ε et divisons l'intervalle $(X, X + \delta)$ pai les points $\xi_1 = X_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ de manière que l'on ait

$$|f(\xi_2) - f(X)| + |f(\xi_3) - f(\xi_2)| + \cdots > \tau - \varepsilon.$$

Soient τ_1 et τ_2 les variations totales de y dans les intervalles (X, ξ_2) et $(\xi_2, X + \delta)$ respectivement ; on aura

$$\tau_2 > |f(\xi_3) - f(\xi_2) - + \cdots > \tau - \varepsilon - |f(\xi_2) - f(X)|,$$

en vertu de la relation précédente. Donc *a fortiori*, puisque ω est aussi $\leqslant \tau_1$ lequel $= \tau - \tau_2$,

$$\omega \leqslant \tau - \tau_2 < \varepsilon + |f(\xi_2) - f(X)|$$

Mais on peut faire tendre ε vers 0 et ξ_2 vers X, donc, f étant continue au point X, on a $\omega = 0$.

On montre d'une manière analogue que l'oscillation de T est nulle à gauche du point X, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Si la fonction à variation bornée, y, est continue dans l'intervalle (a, b), P, N et T sont fonctions continues de X dans (a, b).*

88. Propriétés des fonctions à variation bornée. — I. *Une fonction à variation bornée, y, est la différence de deux fonctions bornées, positives et non décroissantes dans l'intervalle (a, b) et, de plus, continues en tout point où y est continue. Réciproquement, la différence de deux fonctions bornées et non décroissantes est une fonction à variation bornée.*

Nous avons vu (nº 86) que, Y étant la valeur de y au point X, on a

$$Y = (v_1 + P) - N.$$

Donc Y est la différence de deux fonctions de X bornées et non décroissantes. Ces fonctions sont, de plus, continues si y est continue (nº 87). On peut faire en sorte que ces deux fonctions soient positives et même *essentiellement croissantes* si l'on veut ; il suffit, en effet, d'ajouter aux deux termes de cette différence une même quantité croissante et suffisamment grande, par exemple

$$|y_1| + (X - a).$$

Réciproquement, si z et u sont deux fonctions de x bornées et non décroissantes, la fonction $z - u$ est à variation bornée. En effet, la différence des valeurs de $z - u$ pour deux valeurs x_k et x_{k+1} de x est au plus égale à la somme des accroissements de z et de u dans cet intervalle. Donc la somme de toutes ces différences entre deux valeurs extrêmes de x ne peut surpasser la somme des accroissements de z et de u entre les mêmes valeurs, et $z - u$ est à variation bornée.

II. *La somme, la différence et le produit de deux fonctions à variation bornée sont des fonctions de même nature. L'inverse $1 : y$ d'une fonction à variation bornée sera aussi de même nature, pourvu que $|y|$ reste supérieur à un nombre positif fixe.*

La première partie se démontre immédiatement en considérant les deux fonctions y et y' comme les différences $z - u$ et $z' - u'$ de deux fonctions positives non décroissantes. On a en effet,

$$y + y' = (z + z') - (u + u'), \qquad y - y' = (z + u') - (u + z'),$$
$$yy' = (zz' + uu') - (zu' + uz').$$

La dernière partie se vérifie aussi facilement, en observant que, si $|y|$ est $> \mu$, la somme :

$$t = \Sigma \left| \frac{1}{y_{k+1}} - \frac{1}{y_k} \right| = \Sigma \left| \frac{y_{k+1} - y_k}{y_k y_{k+1}} \right| \overset{=}{<} \frac{1}{\mu^2} \Sigma \, | y_{k+1} - y_k |$$

reste toujours inférieure à un nombre fixe.

89. Fonctions absolument continues. — Définition. — *Une fonction $f(x)$ est absolument continue* (Vitali) *dans un intervalle (a, b), si la somme des différences (ou aussi bien des oscillations) de $f(x)$ dans un nombre fini*

ou dans une infinité dénombrable d'intervalles contenus dans (a, b), *tend vers* 0 *avec la somme des amplitudes de ces intervalles.*

Il est effectivement indifférent de dire *différence* ou *oscillation* dans cette définition, car, si la somme des différences de $f(x)$ est en valeur absolue $< \delta$ dans tout ensemble d'intervalles α tel que $\Sigma\alpha < \varepsilon$, la somme des oscillations de $f(x)$ dans ces α sera, comme nous allons le montrer, $\leqslant 2\delta$.

En effet, de chaque intervalle α, on peut extraire un intervalle β tel que la différence absolue de $f(x)$ dans ce β diffère aussi peu qu'on veut de l'oscillation de $f(x)$ dans cet α. Pour l'ensemble des β, les sommes des différences positives et des différences négatives sont respectivement $< \delta$ en valeur absolue, car $\Sigma\beta < \varepsilon$; celle des différences absolues est donc $< 2\delta$ et, par conséquent, la somme des oscillations de $f(x)$ dans les α est aussi $\leqslant 2\delta$.

Théorème I. — *Une fonction absolument continue dans un intervalle* (a, b) *est à variation bornée dans cet intervalle.*

En effet, supposons le contraire et divisons (a, b) en parties infiniment petites. Il y aura au moins une de ces parties où la variation totale de $f(x)$ sera infinie. On peut donc faire croître indéfiniment la somme des différences de $f(x)$ dans un ensemble d'intervalles extraits eux-mêmes de cette partie infiniment petite et $f(x)$ n'est pas absolument continue.

Théorème II. — *Si* $f(x)$ *est absolument continue dans* (a, b), *sa variation totale dans* (a, x) *est aussi une fonction absolument continue* $T(x)$.

En effet, si T n'est pas absolument continue, on peut trouver une suite d'intervalles α, de somme $\Sigma\alpha$ aussi petite qu'on veut, où la somme des différences de T, c'est-à-dire des variations totales de f, surpasse un nombre positif fixe δ. Or on peut décomposer chaque α en parties consécutives assez petites pour que la somme des différences absolues de f dans l'ensemble des parties d'un même α, diffère aussi peu qu'on veut de la variation totale de f dans cet α, donc aussi pour que la même somme étendue à tous les α surpasse δ. Donc $f(x)$ n'est pas absolument continue, ce qui est contre l'hypothèse.

COURS D'ANALYSE INFINITESIMALE

CHAPITRE I,

Dérivation des fonctions explicites d'une variable.

§ 1. Dérivées et différentielles.

90. Dérivée, Fonctions dérivables. — Soit $y = f(x)$ une fonction univoque dans un intervalle (a, b) et x un point de cet intervalle ; donnons à x un accroissement positif ou négatif $\Delta x = h$, que nous appellerons aussi *différence* de x, l'accroissement ou la *différence* correspondante Δy de la fonction sera $f(x+h) - f(x)$ et le rapport de ces accroissements,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Si ce rapport tend vers une limite finie ou infinie lorsque h tend vers zéro d'une manière quelconque, cette limite s'appelle la *dérivée* de $f(x)$ au point x et elle se représente par $f(x)$ (Lagrange), par $\mathrm{D}\, f(x)$ (Arbogast) ou $\mathrm{D}_x f(x)$ (Cauchy).

Si ce rapport tend vers une limite quand h tend vers 0 par des valeurs positives, cette limite est la *dérivée à droite* au point x. De même, la *dérivée à gauche* est la limite du rapport quand h reste négatif. Quand ces deux dérivées sont égales, la fonction a une *dérivée unique* au point x, ou tout simplement une dérivée : celle que nous avons définie tout d'abord.

Si la fonction $f(x)$ admet *une dérivée* (unique) en tout point intérieur de l'intervalle (a, b) et, de plus, une *dérivée à droite* en a et une *dérivée à gauche* en b, elle est *dérivable* dans (a, b).

Il est d'abord évident qu'*une fonction ne peut être dérivable dans un intervalle* (a, b) *qu'à la condition d'être finie en tout*

point intérieur à cet intervalle, car une fonction n'a pas de dérivée (unique) en un point où elle est infinie (*). Mais nous avons aussi le théorème suivant :

Toute fonction qui a une dérivée FINIE *pour une valeur donnée de x est continue en ce point.*

En effet, soit ε une quantité qui tend vers 0 avec h, on a

$$\frac{f(x) + h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

$$\lim [f(x+h) - f(x)] = \lim h [f'(x) + \varepsilon) = 0.$$

91. Cas particuliers. — I. Si $f(x)$ *se réduit à une constante, sa dérivée est nulle.* En effet,

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim \frac{0}{h} = 0.$$

II. *Si $f(x) = x$, sa dérivée est égale à l'unité.* En effet,

$$\lim \frac{(x+h) - x}{h} = \lim \frac{h}{h} = 1.$$

92. Signification géométrique de la dérivée. — C'est le problème des tangentes aux courbes planes qui a conduit à la considération des rapports d'infiniment petits et à la définition de la dérivée. Nous allons montrer, en effet, que la détermination d'une tangente à une courbe plane revient à celle de la dérivée d'une fonction.

Considérons une courbe rapportée à des axes rectangulaires ou obliques, et soient x et y les coordonnées d'un point M de la courbe (fig. 1), celle-ci ayant pour équation

$$y = f(x).$$

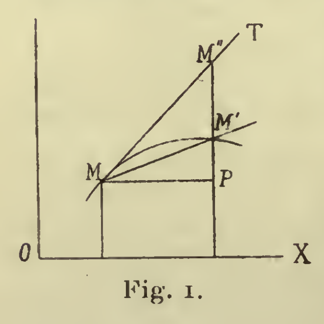


Fig. 1.

Pour définir la tangente à la courbe au point M, considérons une sécante MM' menée par ce point ; si, lorsque le point M' se rapproche indéfiniment

(*) Par exemple, si la fonction $f(x)$ était finie de part et d'autre d'un point x où elle égale à $+\infty$, ses dérivées à droite et à gauche existeraient au point x mais seraient différentes, à savoir respectivement $-\infty$ et $+\infty$.

du point M, la sécante MM' tend vers une position limite MT, cette droite-limite est la *tangente* à la courbe au point M.

Le point M étant donné, la détermination de la tangente revient à celle de son coefficient angulaire τ. Appelons σ le coefficient angulaire de la sécante MM' et désignons par $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$ les coordonnées du point M'. Menons MP parallèle à OX ; on aura

$$\sigma = \frac{PM'}{MP} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Quand M' se rapproche indéfiniment de M, σ tend vers τ ; donc

$$\tau = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

La dérivée de la fonction $f(x)$ est égale au coefficient angulaire de la tangente à la courbe qui a pour équation $y = f(x)$, cette tangente étant menée au point de coordonnées x, y.

93. Différentielle. — Nous dirons qu'une fonction $y = f(x)$ est *différentiable* en un point x si elle est finie et déterminée aux environs de ce point, et si, donnant à x un accroissement arbitraire Δx, la différence $\Delta f(x)$ correspondante peut se décomposer en une somme de deux termes :

$$(1) \qquad \Delta f(x) = A\Delta x + \varepsilon\Delta x,$$

A étant indépendant de Δx, et ε tendant vers 0 avec Δx. Alors le premier terme qui est simplement proportionnel à Δx prend le nom de *différentielle* de y et se désigne par dy ou $df(x)$ (Leibniz). On a donc

$$df(x) = A\Delta x.$$

Mais, quand Δx tend vers 0, on tire de l'équation (1)

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) = A,$$

ce qui prouve que, si $f(x)$ est différentiable, $f'(x)$ a une valeur finie et déterminée. Réciproquement, si $f'(x)$ a une valeur finie A, l'équation (1) a lieu par définition de la dérivée. Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ soit différentiable au point x est qu'elle ait, en ce point, une dérivée finie et déterminée, ce qui exige qu'elle soit continue, et alors on a*

$$(2) \qquad df(x) = f'(x)\,\Delta x.$$

La différentielle d'une fonction est donc le produit de sa dérivée, supposée existante et finie, par une différence arbitraire Δx *attribuée à la variable indépendante* x.

Il est à remarquer que l'équation (1) prend ainsi la forme

$$\Delta y = dy + \varepsilon\,\Delta x.$$

Dans le cas particulier où $f(x)$ se réduit à x, on sait que $f'(x) = 1$, et l'équation précédente se réduit à

$$dx = \Delta x.$$

Donc la différentielle de la variable indépendante se confond avec la différence généralement arbitraire de cette variable.

La formule (1) peut ainsi être remplacée dans le cas général par

$$df(x) = f'(x)\,dx. \tag{3}$$

Donc *la différentielle d'une fonction est le produit de sa dérivée par la différentielle de la variable indépendante.*

Si l'on divise par dx, on trouve

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}. \tag{4}$$

Donc la dérivée d'une fonction est égale au rapport de la différentielle de la variable à la différentielle de la fonction, ce qui fournit une nouvelle expression de la dérivée (Leibniz) et celle qui est le plus employée.

Remarque. — La substitution de dx à Δx dans l'équation (1) n'a rien de nécessaire, mais elle est consacrée par l'usage et cet usage est justifié. Nous verrons en effet (n° 95, V) que l'équation (3) est plus générale que (1) : celle-ci suppose que x soit la variable indépendante, tandis que l'équation (3) n'est pas soumise à cette restriction.

94. Signification géométrique des différentielles. — La différentielle aussi est susceptible d'une interprétation géométrique qui se rattache à celle de la dérivée. Considérons encore la courbe (fig. 1) qui a pour équation

$$y = f(x).$$

Menons la tangente au point M de coordonnées x et y. Don-

nons ensuite à x un accroissement arbitraire Δx et soit M″ le point de la tangente qui a pour abscisse $x + \Delta x$. On a $\Delta x = \mathrm{MP}$ et l'accroissement correspondant de l'ordonnée de la tangente est PM″. Or PM″ : MP est le coefficient angulaire $f(x)$ de la tangente ; il vient donc

$$\mathrm{M''P} = (\mathrm{MP})\, f'(x) = \Delta x\, f'(x) = df(x).$$

Donc *la différentielle de $f(x)$ est égale à l'accroissement de l'ordonnée de la tangente à la courbe $y = f(x)$, lorsque l'on passe de l'abscisse x du point de contact à une autre abscisse $x + \Delta x$.*

95. Règles de dérivation. — L'opération par laquelle on détermine la dérivée d'une fonction s'appelle *dérivation* ; celle par laquelle on détermine la différentielle, *différentiation*. Le premier objet du calcul différentiel est d'établir les règles de ces opérations.

Nous examinerons d'abord le cas où la fonction proposée est *composée* au moyen d'un certain nombre de fonctions plus simples, dont la dérivée sera toujours supposée *déterminée* et *finie*.

I. Dérivée d'une somme. — Soit $y = u + v - w + \ldots$ une somme algébrique de fonctions ayant des dérivées connues u', v' w',... Donnons à x un accroissement Δx et désignons par Δy, Δu, Δv, Δw,... les accroissements correspondants des fonctions ; on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} + \cdots$$

d'où, en faisant tendre Δx vers zéro et en passant à la limite,

$$y' = u' + v' - w' + \cdots$$

En multipliant les deux membres par dx, il vient

$$dy = du + dv - dw + \cdots$$

Donc la dérivée (ou la différentielle) d'une somme algébrique de fonctions est la somme des dérivées (des différentielles) de chacune de ces fonctions.

II. Dérivée d'un produit. — Soit $y = uv$ un produit de deux fonctions ayant des dérivées u' et v'. On a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}(v + \Delta v) + u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

et, en faisant tendre Δx vers zéro,

$$y' = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim (v + \Delta v) + u \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'v + v'u.$$

En multipliant par dx, on trouve

$$dy = u\,dv + v\,du.$$

Donc la dérivée (ou la différentielle) d'un produit de deux facteurs est égale à la somme de chacun des facteurs, multipliés respectivement par la dérivée (ou la différentielle) de l'autre.

Si v se réduit à une constante a, sa dérivée et sa différentielle sont nulles, donc

$$\mathrm{D}.au = a\,\mathrm{D}u, \qquad d.au = a\,du.$$

On voit que la dérivée (ou la différentielle) du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de la constante par la dérivée (ou la différentielle) de la fonction. On exprime cette propriété en disant qu'un facteur constant peut sortir du signe de dérivation (ou de différentiation).

On aura, par la même règle,

$$\mathrm{D}.uvw = vw\mathrm{D}u + u\mathrm{D}.vw = vw\mathrm{D}u + uw\mathrm{D}v + uv\mathrm{D}w$$

et, en général, quel que soit le nombre des facteurs,

$$\mathrm{D}.uvw\ldots = uvw\ldots\left(\frac{\mathrm{D}u}{u} + \frac{\mathrm{D}v}{v} + \frac{\mathrm{D}w}{w} + \cdots\right)$$

Si l'on fait $u = v = w = \cdots$ et si l'on suppose le nombre des facteurs égal à m, il vient (m entier)

$$\mathrm{D}u^m = mu^{m-1}\,\mathrm{D}u.$$

En particulier, si $u = x$,

$$\mathrm{D}x^m = mx^{m-1}.$$

Si l'on multiplie les deux dernières équations par dx, il vient

$$d.uvw\ldots = uvw\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \cdots\right)$$
$$du^m = mu^{m-1}du.$$

III. Dérivée d'un quotient. — Soit $y = \frac{u}{v}$; on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\dfrac{u}{v}}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v+\Delta v)}$$

d'où, en passant à la limite,

$$y'=\frac{v\,u'-u\,v'}{v^2}.$$

Si l'on multiplie par dx, il vient

$$dy=d\,\frac{u}{v}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

Dans le cas particulier où u se réduit à une constante a, sa dérivée est nulle et il vient

$$\mathrm{D}\,\frac{a}{v}=-a\,\frac{\mathrm{D}v}{v^2},\qquad d\,\frac{a}{v}=-a\,\frac{dv}{v^2}.$$

IV. Dérivée d'une fonction inverse. — Soit $y=f(x)$ une fonction admettant une fonction inverse, de telle sorte qu'on ait $x=\varphi\,(y)$. Si l'une de ces fonctions admet une dérivée différente de zéro, l'autre fonction aura aussi une dérivée et celle-ci s'obtiendra immédiatement.

Supposons connue la dérivée de φ par exemple. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\right)};\quad \text{mais}\quad \lim\frac{\Delta x}{\Delta y}=\varphi'\,(y),$$

il viendra donc, à la limite, si $\varphi'(y)$ n'est pas nul,

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}=\frac{1}{\varphi'[f(x)]}.$$

Donc *la dérivée de y considérée comme fonction de x est l'inverse de la dérivée de x considérée comme fonction de y.*

Si l'on représente par un indice la variable considérée comme indépendante dans la dérivation, en d'autres termes, celle par rapport à laquelle on dérive, la règle précédente peut s'écrire

$$\mathrm{D}_x\,y=\frac{1}{\mathrm{D}_y\,x}.$$

V. Dérivée d'une fonction de fonction. — Soient $y=\mathrm{F}\,(u)$ et $u=f(x)$, de sorte que y s'exprime en fonction de u, u étant lui-même fonction de x. Supposons toujours que $\mathrm{F}\,(u)$ et $f(x)$

aient des dérivées *finies* et *déterminées* $F'(u)$ et $f'(x)$. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

et, à la limite, Δu tendant vers zéro avec Δx,

$$y' = F'(u) f'(x).$$

Donc *la dérivée de y par rapport à x est le produit des dérivées, supposées existantes et finies, de y par rapport à u et de u par rapport à x*. Si ces dernières dérivées n'existaient pas, la règle ne serait plus applicable, mais il n'en résulterait pas nécessairement que y n'admît pas de dérivée par rapport à x.

Si l'on multiplie l'équation précédente par dx, on obtient

$$dy = F'(u)\, du.$$

Donc, *si $y = F(u)$, dy s'exprime au moyen de du comme si u était la variable indépendante.* Toutefois cette règle suppose $F(u)$ et u différentiables.

Cette règle fondamentale montre que la différentielle d'une fonction de x se calcule toujours par les mêmes règles, qu'elle soit exprimée directement en fonction de x ou au moyen de variables auxiliaires.

96. Dérivées des fonctions élémentaires. — I. Exponentielle. On a, par définition de la dérivée,

$$D\, e^x = \lim_{h=0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h=0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Posons $e^h - 1 = \alpha$, d'où $h = \operatorname{Log}(1 + \alpha)$; α aura pour limite 0 avec h. Donc (n° 36)

$$\lim \frac{e^h - 1}{h} = \lim \frac{\alpha}{\operatorname{Log}(1+\alpha)} = \frac{1}{\lim \operatorname{Log}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\operatorname{Log} e} = 1.$$

Il vient ainsi

$$D\, e^x = e^x.$$

Donc la fonction e^x se reproduit par dérivation.

La dérivée d'une autre exponentielle quelconque s'obtient par la règle des fonctions de fonctions. On a

$$D\, A^x = D\, e^{x \operatorname{Log} A} = e^{x \operatorname{Log} A} D\,(x \operatorname{Log} A) = A^x \operatorname{Log} A.$$

II. Logarithme. — Considérons d'abord les logarithmes pris dans la base A et soit

$$y = \operatorname{Log}_A x.$$

Cette fonction est l'inverse de l'exponentielle $x = A^y$ et sa dérivée se calcule par la règle des fonctions inverses. On a

$$D_x y = \frac{1}{D_y x} = \frac{1}{A^y \operatorname{Log} A} = \frac{1}{x \operatorname{Log} A}.$$

En particulier, si les logarithmes sont naturels, on a

$$D \operatorname{Log} x = \frac{1}{x}.$$

III. Puissance. — Soit a un nombre donné, et x une variable positive. On a, par les propriétés des logarithmes,

$$x^a = e^{a \operatorname{Log} x}.$$

On en tire, par les propriétés des logarithmes,

$$D\, x^a = e^{a \operatorname{Log} x} D\,(a \operatorname{Log} x) = x^a \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Donc, la règle établie précédemment (n° 95, II) pour a entier, est générale.

En particulier, si $a = \frac{1}{2}$, on a

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

IV. Fonctions trigonométriques. — 1° Soit d'abord $y = \sin x$. On a, par définition,

$$Dy = \lim_{h=0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 2 \lim_{h=0} \frac{\sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}.$$

Or $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ a pour limite $\cos x$, il vient donc, en remplaçant $h : 2$ par α,

$$Dy = \cos x \lim_{\alpha=0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

On sait, par les éléments de trigonométrie, qu'un arc moindre qu'un quadrant est compris entre son sinus et sa tangente. Donc, si α est positif, on a

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha, \qquad \text{d'où} \qquad 1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Ainsi, si α tend vers zéro en restant positif, $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$ reste com-

pris entre deux quantités qui ont pour limite l'unité et l'on a aussi (n° 18, IV)

$$\lim \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

D'ailleurs, comme $\alpha : \sin \alpha$ ne change pas quand α change de signe, cette limite subsiste pour α négatif, et on peut la substituer dans la valeur de Dy, ce qui donne

$$Dy = D \sin x = \cos x.$$

2° On a ensuite, par la règle des fonctions de fonctions,

$$D \cos x = D \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) D\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$
$$D \cos x = -\sin x.$$

3° La règle pour dériver un quotient donne

$$D \operatorname{tg} x = D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \, D \sin x - \sin x \, D \cos x}{\cos^2 x},$$
$$D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4° On trouve, de même,

$$D \sec x = D\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x.$$

5° Enfin, en changeant x en $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ dans les deux dernières fonctions, on obtient, par la règle des fonctions de fonctions,

$$D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad D \operatorname{cosec} x = -\cot x \operatorname{cosec} x.$$

V. Fonctions trigonométriques inverses. — 1° Soit, en premier lieu, $y = \operatorname{arc} \sin x$; la branche principale est définie (n° 38) par les conditions

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Pour en trouver la dérivée, appliquons la règle des fonctions inverses. On a $x = \sin y$, donc

$$D_y x = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ce radical doit être pris avec le signe $+$, car $\cos y$ est positif quand y varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$D_y x = +\sqrt{1 - x^2},$$

$$D_x y = \mathrm{D}\ \mathrm{arc}\sin x = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}},$$

Les autres branches de arc sin x se partagent en deux classes, liées à la principale par les deux formules (n° 38) :

$$y = \mathrm{arc}\sin x + 2k\pi,$$
$$y = (\pi - \mathrm{arc}\sin x) + 2k\pi.$$

Les premières auront donc même dérivée que la branche principale et les secondes, une dérivée de signe contraire.

2° La dérivée de $y = \mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, x$ s'obtient aussi par la règle des fonctions inverses. On a $x = \mathrm{tg}\, y$; donc

$$D_y x = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \mathrm{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

On en conclut

$$D_x y = \mathrm{D}\ \mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{1+x^2}$$

et le résultat est le même pour toutes les branches de la fonction.

3° Les dérivées des autres fonctions circulaires inverses se calculent au moyen des dérivées précédentes par les formules :

$$\mathrm{D}\ \mathrm{arc}\cos x = \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arc}\sin x\right) = -\,\mathrm{D}\ \mathrm{arc}\sin x,$$

$$\mathrm{D}\ \mathrm{arc}\cot x = \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, x\right) = -\,\mathrm{D}\ \mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, x,$$

$$\mathrm{D}\ \mathrm{arc}\sec x = \mathrm{D}\ \mathrm{arc}\cos\frac{1}{x} = -\frac{\mathrm{D}\,\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$\mathrm{D}\ \mathrm{arc}\,\mathrm{cosec}\, x = \mathrm{D}\ \mathrm{arc}\sin\frac{1}{x} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

97. Différentielles des fonctions élémentaires. — Ces différentielles s'obtiennent en multipliant les dérivées par dx. On obtient ainsi le tableau suivant, qu'il est indispensable de connaître par cœur :

$d\,x^a = a\,x^{a-1}\,dx$

$d\,A^x = A^x \operatorname{Log} A\,dx$

$d\,e^x = e^x\,dx$

$d \sin x = \cos x\,dx$

$d \operatorname{tg} x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

$d \sec x = \operatorname{tg} x \sec x\,dx$

$d \cos x = -\sin x\,dx$

$d \cot x = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$

$d \operatorname{cosec} x = -\cot x \operatorname{cosec} x\,dx$

$d\sqrt{x} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

$d \operatorname{Log}_A x = \dfrac{dx}{x \operatorname{Log} A}$

$d \operatorname{Log} x = \dfrac{dx}{x}$

$d \operatorname{arc\,sin} x = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$d \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{dx}{1+x^2}$

$d \operatorname{arc\,sec} x = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

$d \operatorname{arc\,cos} x = -d \operatorname{arc\,sin} x$

$d \operatorname{arc\,cot} x = -d \operatorname{arc\,tg} x$

$d \operatorname{arc\,cosec} x = -d \operatorname{arc\,sec} x$

Il est essentiel de remarquer que les formules de ce tableau subsistent encore quand on y remplace la variable x par une fonction quelconque u de x. Ainsi

$$d\,A^u = A^u \operatorname{Log} A\,du, \quad \text{etc.}$$

98. Différentiation des fonctions composées. — Les règles générales du n° 95 et les formules du tableau précédent suffisent pour déterminer la différentielle d'une fonction explicite quelconque y, pourvu qu'elle soit exclusivement composée par addition, soustraction, multiplication, division ou superposition du signe fonctionnel au moyen des fonctions élémentaires. En effet, par l'introduction de variables auxiliaires, on ramènera la fonction y à des sommes, produits,... de simples lettres ou à des fonctions élémentaires d'une seule lettre. La différentielle s'exprimera par les règles des n°s 95 et 97 au moyen des différentielles des variables auxiliaires. On recommencera la même opération pour calculer les différentielles des variables auxiliaires et l'on continuera ainsi de suite jusqu'à ce que les différentielles puissent s'exprimer en fonction de x et de dx seulement. En éliminant alors les variables auxiliaires et leurs différentielles, on obtiendra dy en fonction de x et de dx. Pour trouver la dérivée Dy, il suffira de diviser par dx.

Avec un peu d'exercice, ces calculs se font très rapidement.

On peut même se dispenser d'introduire de nouvelles lettres et la série des substitutions se fait mentalement. Soit, par exemple, à trouver la différentielle de $e^{\sin x} \cos x$; on a successivement

$$\begin{aligned} d.e^{\sin x} \cos x &= \cos x \, d.e^{\sin x} + e^{\sin x} d.\cos x \\ &= \cos x \, e^{\sin x} d.\sin x - e^{\sin x} \sin x \, dx \\ &= e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) \, dx. \end{aligned}$$

Remarques. — Certaines fonctions de fonctions revêtent parfois une forme sous laquelle le mode de composition n'est pas immédiatement apparent, et il faut alors les transformer avant de les différentier.

C'est le cas pour les fonctions u^v et $\mathrm{Log}_u v$, dans lesquelles u et v désignent des fonctions de x. On commencera par les exprimer au moyen d'une base constante, par exemple e ; on aura ainsi

$$u^v = e^{v \,\mathrm{Log}\, u}, \qquad \mathrm{Log}_u v = \frac{\mathrm{Log}\, v}{\mathrm{Log}\, u},$$

et les différentielles s'obtiennent alors par les règles précédentes.

La *dérivée logarithmique* de y est la dérivée, $y' : y$, de son logarithme. La dérivée y' s'en déduit en multipliant celle-ci par y. Soit, par exemple, $y = u^v v^u$; on aura

$$\mathrm{Log}\, y = v \,\mathrm{Log}\, u + u \,\mathrm{Log}\, v,$$

$$\frac{y'}{y} = v' \,\mathrm{Log}\, u + u' \,\mathrm{Log}\, v + \frac{vu'}{u} + \frac{uv'}{v}.$$

Cet exemple montre qu'il est souvent commode de passer par la dérivée logarithmique pour calculer la dérivée de y.

99. Exception aux règles précédentes. — Les règles de dérivation des fonctions composées supposent l'existence des fonctions composantes et de leurs dérivées. Si cette condition vient à manquer en certains points exceptionnels, les règles ordinaires ne s'appliqueront plus en ces points-là, et il faudra un calcul direct pour s'assurer de l'existence de la dérivée et pour la déterminer.

Considérons l'exemple classique

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

Sauf au point $x = 0$, cette fonction est bien définie, continue et elle a pour dérivée

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Achevons de définir $f(x)$ en faisant $f(0) = 0$, de sorte que $f(x)$ est encore continuè au point 0. Comme sinus de 1 : 0 n'a pas de sens, les règles de dérivation ne s'appliquent pas au point 0. Cependant $f'(0)$ existe et se calcule directement. Puisque $f(0) = 0$, on a, par définition.

$$f'(0) = \lim_{h=0} \frac{f(h)}{h} = \lim h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Il faut remarquer que $f'(x)$ ne tend ici vers aucune limite quand x tend vers 0, auquel cas $\cos(1:x)$ oscille indéfiniment entre -1 et $+1$. Cet exemple prouve donc que $f(a)$ peut avoir une valeur déterminée, sans être la limite de $f(x)$ quand x tend vers a.

100. Extension des définitions au cas d'une variable complexe. — Soit $z = x + yi$ une variable complexe ; la dérivée d'un polynome ou d'une fraction rationnelle $f(z)$ se définit comme dans le cas d'une variable réelle. C'est la limite, $f'(z)$, vers laquelle tend le rapport

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

des accroissements (réels ou complexes) correspondants de la fonction et de la variable quand celui-ci tend vers zéro d'une manière quelconque. Lorsque cette limite n'existe pas, la fonction n'a pas de dérivée pour la valeur considérée de z.

Les différentielles se définissent en multipliant les dérivées par la différentielle dz de la variable indépendante. Cette derniére différentielle n'est autre chose que l'accroisssment arbitraire $h = \Delta x + i\Delta y$ que l'on attribue à cette variable.

Les règles qui ont été établies (n° 95) pour dériver une somme, un produit, un quotient de deux fonctions, une puissance entière de la variable indépendante, règles qui résultent immédiatement de la définition de la dérivée comme limite d'un quotient, subsistent intégralement dans le cas où la variable est complexe. Ces règles suffisent pour dériver un polynome et une fraction rationnelle.

I. Si $f(z)$ est un polynome entier,

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n,$$

on a

$$f'(z) = nA_0 z^{n-1} + (n-1) A_1 z^{n-2} + \dots + A_{n-1}.$$

Donc la dérivée d'un polynome est finie et déterminée pour toutes les valeurs de z sans exception.

II. Si $f(z)$ est une fraction rationnelle, ses deux termes sont des polynomes A et B ; et la règle pour dériver un quotient donne

$$f'(z) = \mathrm{D}\frac{A}{B} = \frac{BA' - AB'}{B^2}.$$

Donc une fraction rationnelle a une dérivée déterminée pour toutes les valeurs de z sauf les racines du dénominateur B.

III. Lorsqu'un polynome est décomposé en facteurs linéaires, sa dérivée s'obtient aussi par la règle de dérivation d'un produit. Soit

$$f(z) = (z-a)^m (z-b)^n \dots :$$

on aura

$$f'(z) = (z-a)^m (z-b)^n \dots \left[\frac{m}{z-a} + \frac{n}{z-b} + \dots\right]$$

La *dérivée logarithmique* serait, plus simplement.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{n}{z-b} + \dots.$$

Remarque. — Comme nous le verrons, on se sert souvent de la considération des variables complexes pour obtenir plus facilement des résultats relatifs aux variables réelles. Ceux-ci en effet, se déduisent comme cas particuliers des premiers en supposant que la variable devienne réelle.

Exercices.

1. Démontrer les formules suivantes :

$$d.\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{bx}{a} = \frac{ab\,dx}{a^2 + b^2x^2} \qquad d.\,\mathrm{Log}\,\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{2ab\,dx}{a^2 - b^2x^2}.$$

$$d.\,\mathrm{Log}\,(x + \sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad d.\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{x}{a} = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$d.\,\mathrm{Log}\,\sin x = \cot x\,dx \qquad d.\,\mathrm{Log}\,\cos x = -\mathrm{tg}\,x\,dx$$

$$d.\,\mathrm{Log\,tg}\,\frac{x}{2} = \frac{dx}{\sin x} \qquad d.\,\mathrm{Log\,tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{dx}{\cos x}$$

$$d.\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\mathrm{tg}x\right) = \frac{ab\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \qquad d.\mathrm{Log}\frac{a+b\mathrm{tg}x}{a-b\mathrm{tg}x} = \frac{2ab\,dx}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}$$

$$d\left[\mathrm{tg}x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x\right] = \frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$d\left[\frac{3\,x}{2} + \left(\frac{3}{2}\cos x + \cos^3 x\right)\sin x\right] = 4\cos^4 x\,dx.$$

2. Déterminer les dérivées *à droite* et *à gauche* au point 0 des deux fonctions (supposées nulles au point 0) :

$$f(x) = x\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{x}, \qquad \varphi(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

R. On a

$$\lim \frac{f(+h)}{+h} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{h} = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim \frac{\varphi(+h)}{+h} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = 0,$$

$$\lim \frac{f(-h)}{-h} = \mathrm{arc\,tg}\left(-\frac{1}{h}\right) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim \frac{\varphi(-h)}{-h} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{h}}} = 1.$$

Ces deux dérivées sont donc différentes.

3. Montrer que $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (supposé nul pour $x = 0$) n'a pas de dérivée au point $x = 0$.

R. Le rapport $f(h) : h$ est égal à $\sin(1 : h)$ et ne tend vers aucune limite quand h tend vers 0.

§ 2. Propriétés de la dérivée. Nombres dérivés.

101. **Théorème** — *Soit $y = f(x)$; si l'on suppose Δx infiniment petit, et $f'(x)$ fini et différent de 0 au point donné x, Δy et dy sont deux infiniment petits dont le rapport a pour limite l'unité.*

En effet, on a, par définition de la dérivée,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

ε ayant pour limite 0 avec Δx. D'où, en divisant par $f'(x)$ qui n'est pas nul par hypothèse, et en observant que $dy = f'(x)\,\Delta x$,

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)}.$$

Le théorème résulte de cette égalité, dans laquelle $\varepsilon : f'(x)$ a pour limite O avec Δx.

Donc, quand Δx est infiniment petit, Δy et dy sont deux infiniment petits, susceptibles d'être substitués l'un à l'autre sous les conditions exposées plus haut (n° 21). On doit se garder toutefois de les confondre entre eux (*).

102. Fonction croissante, décroissante en un point. — Si $f'(x)$ est positif au point x, le quotient $\Delta y : \Delta x$ a une limite positive, donc Δy est différent de 0 et de même signe que Δx pour les valeurs suffisament petites de $|\Delta x|$. On dit, dans ce cas, que la fonction est *croissante au point* x.

Si, au contraire, $f(x)$ est négatif, Δy et Δx sont de signes contraires pour les valeurs suffisamment petites de Δx. Dans ce cas, la fonction est *décroissante au point* x.

Il résulte de là que, si $f'(x)$ n'est pas nul, la fonction $f(x)$ admet toujours, dans le voisinage immédiat du point x, des valeurs supérieures et inférieures à celle qu'elle acquiert au point x. Les valeurs supérieures, par exemple, s'obtiendront à droite du point x si la fonction est croissante, et à gauche si elle est décroissante. Cette simple remarque sert de base à la proposition suivante, connue sous le nom de théorème de Rolle, quoique Rolle ne l'ait énoncée que pour un polynome.

103. Théorème de Rolle. — *Si la fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b), s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$ et admet une dérivée unique (finie ou infinie) en tout point intermédiaire (a, b pouvant être exclus), cette dérivée s'annulera en l'un des points intermédiaires.*

En effet, $f(x)$ a une plus grande valeur M et une plus petite valeur m dans l'intervalle (a, b) (n° 27, III). Si M et m sont nuls tous deux, $f(x)$, étant égale à zéro dans tout l'intervalle, est une constante et sa dérivée sera nulle dans tout l'intervalle. Dans ce cas, le théorème est démontré. Si, au contraire, M (ou m) est différent de zéro, la fonction $f(x)$ atteindra cette plus grande (ou plus petite) valeur (n° 27, III), pour une valeur ξ de x comprise entre a et b. On aura $f'(\xi) = 0$; car, s'il en était autrement,

(*) Dans les ouvrages d'applications, on a souvent le tort de les confondre, au moins dans le langage.

la fonction $f(x)$ serait croissante ou décroissante au point ξ et acquerrait dans le voisinage immédiat de ce point des valeurs supérieures et inférieures à $f(\xi)$, comme on l'a montré au n° précédent. Donc $f(\xi)$ ne serait pas la plus grande (ou plus petite) valeur supposée.

Corollaire. — Si $f(x)$ reprend la même valeur aux points a et b, sa dérivée s'annule en un point intermédiaire, car la fonction $f(x) - f(a)$, qui a la même dérivée, s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$.

104. Formule des accroissements finis (Lagrange). — Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) tout entier, ayant une dérivée unique (finie ou non) en tout point intérieur (au sens étroit) à cet intervalle, il en sera de même pour la fonction $\varphi(x)$, définie par l'équation

$$\varphi(x) = (b - a)[f(x) - f(a)] - (x - a)[f(b) - f(a)].$$

Mais cette fonction s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$, donc, en vertu du théorème de Rolle, sa dérivée,

$$\varphi'(x) = (b - a) f'(x) - [f(b) - f(a)],$$

s'annule pour une valeur ξ de x entre a et b, d'où

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

Telle est la formule des accroissements finis. On la met le plus souvent sous une autre forme. Remplaçons a par x et b par $x + h$, alors ξ (qui est compris entre x et $x + h$) peut être remplacé par $x + \theta h$, θ désignant un nombre généralement inconnu > 0 et < 1. On trouve ainsi

$$f(x + h) - f(x) = h f'(x + \theta h)$$
$$(0 < \theta < 1).$$

La formule antérieure ne supposait pas $a < b$ et, par suite, h est, dans celle-ci, de signe quelconque.

La formule des accroissements finis est une des formules fondamentales du calcul différentiel. Elle est d'un usage continuel. On en déduit le théorème suivant :

105. Theorème. — *Toute fonction $f(x)$, dont la dérivée est constamment nulle dans un intervalle (a, b), se réduit à une constante dans cet intervalle.*

Soient, en effet, x et $x+h$ deux valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), on aura, par la formule précédente, en observant que $f(x)$ est continue (n° 90),

$$f(x+h) - f(x) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f(x+h) = f(x),$$

c'est-à-dire que la fonction est une constante.

Corollaire. — *Deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ dont les dérivées sont finies et égales dans un intervalle (a, b) ne diffèrent que par une constante dans cet intervalle.*

En effet, la fonction $f(x) - \varphi(x)$, ayant une dérivée constamment nulle, se réduit à une constante C et l'on a

$$f(x) = \varphi(x) + C.$$

Ce théorème est le *théorème fondamental du calcul intégral.* Dans celui-ci, on se propose de trouver *toutes* les fonctions ayant une dérivée connue. On voit que le problème sera résolu si l'on peut en trouver une, car les autres s'en déduisent par l'addition d'une constante.

106. Théorème. — *Si $f(x)$ a une dérivée $f'(x)$ et tend vers l'infini quand x tend vers une valeur finie a, il est impossible que $f'(x)$ conserve une valeur finie quand x tend vers a.*

En effet, si $|f'(x)|$ avait une borne supérieure finie M dans l'intervalle (a, b), la formule des accroissements finis donnerait, pour x compris entre a et b,

$$|f(x) - f(b)| < M\,|x - b|$$

et, comme on peut faire tendre x vers a dans cette formule, on voit que $f(x)$ ne croîtrait pas indéfiniment quand x tend vers a.

107. Fonction croissante ou décroissante dans un intervalle. — *Si la dérivée $f'(x)$ est positive ou nulle dans l'intervalle (a, b), sans toutefois être constamment nulle, la fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire que (b étant $> a$) on a $f(b) > f(a)$.*

En effet, quel que soit x entre a et b, la formule des accroissement finis s'applique aux deux intervalles ax et xb et donne

$$f(b) - f(x) = (b - x)\,f'(\xi) \geqslant 0,$$
$$f(x) - f(a) = (x - a)\,f'(\xi') \geqslant 0,$$

d'où $f(b) \geqslant f(x) \geqslant f(a)$; et j'en conclus $f(b) > f(a)$, car l'égalité entraînerait la constante de $f(x)$ et l'on aurait partout $f'(x) = 0$, contrairement à l'hypothèse.

De même, *si $f'(x)$ est négatif ou nul dans l'intervalle (a, b), sans toutefois être constamment nul, la fonction $f(x)$ décroît dans cet intervalle : on a $f(b) < f(a)$.*

108. Formule de Cauchy. — *Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions continues dans l'intervalle (a, b) et admettant des dérivées bien déterminées et finies en tout point intermédiaire. Supposons : 1° que les deux dérivées $f'(x)$ et $F'(x)$ ne s'annulent pas simultanément entre ces limites et 2° que $F(b)$ soit différent de $F(a)$. On aura* (Cauchy)

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \qquad (a < \xi < b)$$

En effet, observons que la fonction de x

$$f(x)\,[F(b) - F(a)] - F(x)\,[f(b) - f(a)]$$

prend la même valeur aux points a et b ; il vient, par le théorème de Rolle,

$$f'(\xi)\,[F(b) - F(a)] - F'(\xi)\,[f(b) - f(a)] = 0.$$

Mais $F'(\xi)$ n'est pas nul, sinon les deux dérivées $f'(\xi)$ et $F'(\xi)$ s'annuleraient simultanément en vertu de cette relation (puisque $F(b) - F(a)$ n'est pas nul). Donc on peut diviser l'équation par $F(b) - F(a)$ et $F'(\xi)$, ce qui donne la formule de Cauchy.

Remarque. — Si $F'(x)$ ne s'annule pas pour $x > a$ et $< b$, la condition 1° est évidemment vérifiée, mais la condition 2° le sera aussi, car, si $F(b)$ était égal à $F(a)$, la dérivée s'annulerait en un point intermédiaire.

La formule des accroissements finis n'est qu'un cas particulier de celle de Cauchy. Il faut faire $F(x) = x$, ce qui est permis, puisque la dérivée, $F'(x) = 1$, ne s'annule pas.

109. Théorème. — *Si $f'(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), à tout nombre positif ε correspond un nombre δ tel qu'on ait*

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon \text{ si } |h| < \delta,$$

pourvu que x et $x + h$ appartiennent à l'intervalle (a, b).

Par la formule des accroissements finis, le premier membre se met sous la forme

$$| f'(x + \theta h) - f'(x) | .$$

Mais on peut supposer l'oscillation de la fonction continue f' moindre que ε dans tout intervalle $< \delta$ (n° 27, IV), auquel cas cette différence est *a fortiori* $< \varepsilon$.

Réciproquement, si $\Delta f : \Delta x$ converge uniformément vers sa limite $f'(x)$, celle-ci sera fonction continue de x dans l'intervalle (a, b).

Montrons, en effet, que l'accroissement de $f'(x)$ peut être rendu inférieur à tout nombre donné 3ε, à condition de rendre celui de x suffisamment petit.

Prenons d'abord h assez petit pour qu'on ait, quel que soit x,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \eta, \qquad | \eta | < \varepsilon.$$

Donnons ensuite à x un accroissement (positif ou négatif) suffisamment petit pour que le rapport $[f(x+h) - f(x)] : h$, qui est fonction continue de x, varie de moins que ε ; comme η varie de moins que 2ε, $f'(x)$ variera de moins que 3ε.

110. Théorème. — *Si $f(x)$ est continue et dérivable dans l'intervalle (a, b), $f'(x)$ ne peut passer d'une valeur à une autre dans cet intervalle sans passer par toutes les valeurs intermédiaires* (Darboux).

Considérons d'abord le cas où $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signes contraires ; je dis que $f'(x)$ s'annule entre a et b. En effet, soit, pour fixer les idées, $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$, la plus grande valeur de $f(x)$, ne pouvant être atteinte ni en a ni en b, le sera en un point intermédiaire ξ, où l'on aura donc $f'(\xi) = 0$.

Passons au cas général. Soit A un nombre compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$; la fonction $f(x) - \mathrm{A}x$ aura ses dérivées de signes contraires en a et en b, Donc il existe un point intermédiaire où $f'(\xi) - \mathrm{A} = 0$ et $f'(\xi) = \mathrm{A}$.

Il est à remarquer que la propriété énoncée dans ce théorème appartient aux fonctions continues (n° 27, VI) mais ne les caractérise pas.

111. Nombres dérivés. — Soit $f(x)$ une fonction univoque de x ; considérons le rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Quand h tend vers zéro en restant positif, ce rapport a une *plus grande limite* et une *plus petite limite* qui peuvent être finies ou infinies (nº 15). La première est le *nombre dérivé supérieur à droite*, la seconde le *nombre dérivé inférieur à droite*. On les représente par les symboles (Dini) :

$$\Lambda_x, \qquad \lambda_x.$$

Si ces deux nombres sont égaux, leur valeur commune sera celle de la dérivée à droite au point x (nº 90).

De même, la *plus grande* et la *plus petite limite* du rapport précédent quand h tend vers 0 en restant négatif, sont les nombres *dérivés supérieur* et *inférieur à gauche*. On les représente par Λ'_x et λ'_x et, s'ils sont égaux, leur valeur commune est celle de la dérivée à gauche.

Au lieu de nombres dérivés, nous dirons aussi bien dérivées supérieures ou inférieures à droite ou à gauche.

Si l'on change x en $-x$, les dérivées à droite se permutent avec celles de gauche ; si l'on remplace $f(x)$ par $-f(x)$, les supérieures se permutent avec les inférieures en changeant de signe.

Cette simple remarque permet, dans bien des cas, d'étendre immédiatement aux quatre nombres dérivés un théorème établi pour l'un d'eux.

112. Propriétés des nombres dérivés d'une fonction continue. — I. *Si* L *et* l *sont les bornes supérieure et inférieure de l'un des quatre nombres dérivés dans l'intervalle* ab ($b > a$) (*), *et si la fonction* $f(x)$ *est continue dans cet intervalle, on aura*

$$l \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \mathrm{L}.$$

Supposons qu'il s'agisse de la dérivée supérieure à droite Λ et proposons-nous d'établir la seconde inégalité. Il suffira de montrer que, quelque petit que soit ε positif, il est impossible que l'on ait

$$f(b)-f(a)-(\mathrm{L}+\varepsilon)(b-a) > 0.$$

En effet, si cette inégalité avait lieu, la fonction *continue*

$$\varphi(x) = f(x)-f(a)-(\mathrm{L}+\varepsilon)(x-a),$$

(*) Pour déterminer ces bornes, on ne doit pas tenir compte de la dérivée à droite du point b ou à gauche du point a, la définition de ces nombres se faisant en dehors de l'intervalle ab.

qui est certainement négative pour x suffisamment voisin de a (puisque $\Lambda_a < L + \varepsilon$), changerait de signe et s'annulerait, par conséquent, entre a et b. Soit c sa plus grande racine inférieure à b ; pour $x > c$, on aura $\varphi(x) > 0$, donc $\varphi(x) - \varphi(c) > 0$, c'est-à-dire

$$f(x) - f(c) - (L + \varepsilon)(x - c) > 0.$$

donc Λ_c serait $\geqslant L + \varepsilon$, ce qui est contraire à la définition de L.

II. *Les quatre nombres dérivés ont la même borne supérieure et la même borne inférieure finie ou infinie dans tout intervalle* (*) (Dini),

Pour fixer les idées, considérons les deux bornes supérieures L et L′ des deux dérivées supérieures Λ et Λ'. Si x' et x'' sont deux valeurs quelconques de x, le théorème précédent s'applique à l'intervalle $x'x''$ et donne

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \leqslant L \text{ et que } L'.$$

Donc aucun nombre dérivé ne peut surpasser ni L ni L′ donc L et L′, ne pouvant se surpasser l'un l'autre, sont égaux.

En particulier, *si l'un des quatre nombres dérivés est continu en un point ou dans un intervalle, ils le sont tous, et la fonction (supposée continue) a une dérivée unique en ce point ou dans cet intervalle.*

Donc encore, *si l'un des nombres dérivés est constamment nul, la fonction* $f(x)$ *a une dérivée unique nulle et se réduit à une constante.*

113. Fonction croissante, décroissante dans un intervalle. — *Si l'un des nombres dérivés d'une fonction continue $f(x)$ est constamment positif ou nul (sans l'être constamment) dans l'intervalle ab, la fonction est croissante dans cet intervalle, c'est-à-dire que $f(b) > f(a)$.*

En effet, le théorème I du n° précédent s'applique aux intervalles (a, x) et (x, b) et, la borne inférieure l étant $\geqslant 0$, on en conclut

$$f(x) - f(a) \geqslant 0, \qquad f(b) - f(x) \geqslant 0.$$

Donc $f(b) \geqslant f(x) \geqslant f(a)$ et j'en conclus $f(b) > f(a)$, car l'égalité entraînerait la constante de $f(x)$, et $f'(x)$ serait constamment nul.

De même, *si l'un des nombres dérivés est constamment négatif ou nul (sans l'être constamment) dans l'intervalle ab, la fonction continue $f(x)$ est décroissante dans l'intervalle ab, c'est-à-dire que $f(b) < f(a)$.*

114. Théorème. — *Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) ; si $f(b)$ est plus petit (plus grand) que $f(a)$, l'ensemble des points de cet intervalle où un même nombre dérivé de $f(x)$, par exemple Λ, est négatif (positif) a la puissance du continu et contient un ensemble parfait.*

(*) Voir la note de la page précédente.

Soit $f(b) < f(a)$. Prenons ε positif assez petit pour que la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) + \varepsilon(x - a),$$

nulle pour $x = a$, soit négative pour $x = b$. Soit ensuite c un paramètre négatif supérieur à $\varphi(b)$. Considérons la courbe $y = \varphi(x)$ et l'horizontale $y = c$; la courbe est au-dessus de l'horizontale au point a et en dessous au point b. Donc l'horizontale coupe la courbe entre les deux. Soit M le point d'intersection dont l'abscisse X est la plus grande : la courbe sera sous l'horizontale à droite du point X, de telle sorte qu'on a, pour h positif assez petit,

$$\frac{\varphi(X+h) - \varphi(X)}{h} = \frac{f(X+h) - f(X)}{h} + \varepsilon < 0.$$

Donc, quand h tend vers 0, il vient, à la limite, au point X,

$$\Lambda + \varepsilon \leqslant 0, \qquad \text{d'où} \qquad \Lambda \leqslant -\varepsilon < 0.$$

A chaque valeur du paramètre c entre 0 et $\varphi(b)$ correspond un point X différent où Λ est négatif. On voit déjà que l'ensemble E de ces points X a la puissance du continu.

Je dis que l'on a aussi $\Lambda \leqslant -\varepsilon$ aux points-limites de l'ensemble E. Observons, en effet, que M se déplace vers la gauche quand l'horizontale s'élève, c'est-à-dire que X varie en sens contraire de c. Considérons donc une suite de points X tendant vers un point-limite X_1 (de gauche à droite par exemple) et la droite variable $y = c$ correspondante. Celle-ci descend alors constamment et tend vers une position-limite $y = c_1$; mais à droite du point X, elle était toujours au-dessus de la courbe, donc, dans sa position-limite, elle l'est encore (le contact étant possible). Le même raisonnement que tout à l'heure s'applique donc encore au point-limite X_1 et prouve que l'on a $\Lambda + \varepsilon \leqslant 0$ en ce point.

En définitive, on a $\Lambda < 0$, dans l'ensemble E et son dérivé, c'est-à-dire dans un ensemble fermé ayant la puissance du continu, donc dans un ensemble parfait (nos 61 et 69).

Remarque. — *Si l'ensemble* E *des points où la dérivée supérieure* Λ *est négative était de mesure nulle, l'ensemble* E_1 *des points où cette dérivée est infinie négative contiendrait aussi un ensemble parfait.*

Prenons, en effet, ε assez petit pour que $f(b) - f(a) + \varepsilon$ soit encore négatif, et donnons-nous une suite illimitée positive $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ telle que l'on ait

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots < \varepsilon.$$

Enfermons successivement E (au sens étroit) dans une infinité d'intervalles α, puis d'intervalles β, puis d'intervalles $\gamma, \ldots$ tels que

$$\Sigma\alpha < \varepsilon_1, \quad \Sigma\beta < \varepsilon_2, \quad \Sigma\gamma < \varepsilon_3, \ldots$$

Désignons par $\varphi(x)$ la somme, fonction de x, des longueurs de tous les intervalles α, β, γ,... et portions de ces intervalles entre a et x. Cette fonction positive $\varphi(x)$ est $< \varepsilon$ dans (a, b) ; elle est essentiellement croissante (ou constante) ; ses nombres dérivés sont positifs (ou nuls) partout, mais, de plus, infinis en chaque point de l'ensemble E, lesquels sont intérieurs à une infinité d'intervalles α, β, γ,..., auquel cas $\varphi(x)$ croît plus rapidement que tout multiple de x.

Ceci fait, la fonction

$$f(x) + \varphi(x)$$

ne peut avoir sa dérivée supérieure Λ négative qu'aux points de l'ensemble E_1 contenu dans E où celle de $f(x)$ est infinie négative. Comme on a d'ailleurs $f(b) + \varphi(b) < f(a) + \varphi(a)$, on est ramené au théorème précédent.

115. Théorème. — *Si un nombre dérivé d'une fonction continue $f(x)$ change de signe dans un intervalle (a, b), l'ensemble E de tous les points où ce nombre a le même signe contient un ensemble parfait. Si, de plus, E est de mesure nulle, la partie de E où le nombre dérivé est infini contient aussi un ensemble parfait.*

Supposons, pour fixer les idées, que E soit l'ensemble des points où $\Lambda < 0$. Si Λ est < 0 au point x, $f(x + h)$ sera $< f(x)$ à condition que h soit positif assez petit, ce qui ramène au théorème précédent.

116. Théorème généralisé de Scheeffer. — *Si, dans un intervalle (a, b), deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ ont leurs nombres dérivés supérieurs à droite : 1° finis en chaque point sauf peut être dans un ensemble E_1, et 2° égaux sauf peut-être dans un ensemble de mesure nulle, les deux fonctions ne diffèrent que par une constante dans l'intervalle (a, b), à moins que E_1 ne contienne un ensemble parfait.*

En effet, les dérivées supérieures à droite étant de plus grandes limites, on a, en considérant Λ comme un symbole opératoire,

$$\Lambda(f_1 - f_2) \geqslant \Lambda f_1 - \Lambda f_2.$$

Donc $f_1 - f_2$ a son nombre dérivé Λ nul ou positif sauf dans un ensemble de mesure nulle, et il ne peut être infini négatif que si Λf_1 ou Λf_2 est infini, donc dans E_1. Par conséquent, si E_1 ne contient pas d'ensemble parfait, ce nombre dérivé ne peut être négatif en vertu du théorème précédent, et la fonction $f_1 - f_2$ est constante ou croissante dans (a, b). Pour les mêmes raisons, $f_2 - f_1$ l'est aussi. Ces deux fonctions ne pouvant être en même temps croissantes, elles sont constantes.

Un ensemble parfait n'étant pas dénombrable, le théorème précédent renferme comme cas particulier l'énoncé de SCHEEFFER :

Deux fonctions continues qui, dans un intervalle (a, b), ont la même dérivée supérieure à droite finie, sauf pour un ensemble dénombrable de points, ne peuvent différer que par une constante dans cet intervalle.

REMARQUE. — Le théorème précédent admet une sorte de réciproque :

Une fonction dont les nombres dérivés peuvent être infinis sur un ensemble parfait E *de mesure nulle, mais sont donnés et finis partout ailleurs, demeure cependant arbitraire.*

En effet, la correspondance entre les points x de E et ceux y du segment 0-1, définit (nº 66) une fonction continue croissante $x = \varphi(y)$, dont l'inverse $y = \psi(x)$ est une fonction continue de x, croissante pour les points de E et constante dans les intervalles contigus à E. Soit $F(y)$ une fonction continue arbitraire ; la fonction $F(\psi x)$ aura sa dérivée nulle sauf au point de E : elle demeure cependant arbitraire avec F.

§ 3. Dérivées et différentielles successives.

117. Définitions. — Soit $y = f(x)$ une fonction univoque d'une variable réelle x, ayant une dérivée dans un intervalle. Si cette nouvelle fonction, $y' = f'(x)$, admet une dérivée en un point x de cet intervalle, on la représente par y'', $f''(x)$ ou D^2y et on l'appelle la *dérivée seconde* de y.

De même, la *dérivée troisième* est la dérivée de y''. Elle se désigne par y''', $f'''(x)$, D^3y. On continue ainsi de suite, de sorte que la *dérivée d'ordre n* est la dérivée de celle d'ordre $n - 1$. Elle se représente par $y^{(n)}$, $f^{(n)}(y)$ ou $D^n y$.

Si, pour définir les dérivées successsives au point a, on ne tient compte que des valeurs de x qui sont $\geqslant a$, on obtient les dérivées successives *à droite* au point a ; on obtient celles *à gauche* si $x \leqslant a$.

Il faut observer que, d'après ces définitions, l'existence d'une dérivée finie $D^n y$ au point x exige celle d'une dérivée $D^{n-1}y$ finie et déterminée aux environs de x, donc la continuité des dérivées d'ordre moindre aux environs du même point.

Les dérivées successives des fonctions rationnelles d'une variable complexe se définissent comme quand la variable est réelle. Il n'y a pas lieu de nous y arrêter. Revenons aux variables réelles.

Si dy est différentiable, sa différentielle est la *différentielle seconde* de y et se désigne par d^2y. Cette nouvelle différentielle dépend de la relation que l'on veut établir entre la variable x et sa différence Δx ou dx. Si cette différence est la même pour toutes les valeurs de x et la même encore dans les différentiations successives, elle doit être traitée comme une constante et l'on a

$$d^2y = d.f'(x)\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

De même, la différentielle troisième d^3y est celle de d^2y, on a

$$d^3y = d.f''(x)\,dx^2 = f'''(x)\,dx^3,$$

et ainsi de suite. En général,

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

On tire de là

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Donc *la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction est le quotient de la différentielle $n^{ième}$ de la fonction par la puissance $n^{ième}$ de la différentielle de la variable prise constante par rapport à x, ce qui fournit une nouvelle manière de représenter cette dérivée et celle qui est le plus généralement employée.*

Remarque. — La condition que dx soit constant par rapport à x n'empèche pas que dx puisse varier à un autre point de vue. Ainsi on peut faire tendre dx vers 0, pourvu que ce soit pour toutes les valeurs de x en même temps et de la même manière.

118. Des différences finies. — Si l'on donne à x un accroissement Δx, la fonction continue $f(x)$ prendra un accroissement

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

que nous appellerons *différence première* de $f(x)$.

La différence de la différence première est la *différence seconde*, elle se représente par $\Delta^2 f(x)$, et ainsi de suite. On prend la différence Δx indépendante de x, de sorte que

$$\Delta^2 f(x) = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x),$$
$$\Delta^3 f(x) = f(x + 3\Delta x) - 3f(x + 2\Delta x) + 3f(x + \Delta x) - f(x),$$

et ainsi de suite.

Il existe, entre ces différences successives et les dérivées successives de $f(x)$, *une relation importante* que voici :

$$(1) \qquad \Delta^n f(x) = \Delta x^n f^{(n)}(x + \theta n \Delta x) \quad (0 < \theta < 1).$$

Elle suppose $f^{(n)}(x)$ déterminée entre x et $x + n\Delta x$ (limites exclues) et $f^{(n-1)}(x)$ continue dans cet intervalle entier. Nous appellerons cela les *conditions d'ordre n*. Pour $n = 1$, la formule est exacte : c'est celle des accroissements finis. Pour

l'établir en général, il suffit donc de l'étendre de l'ordre $n - 1$ à n. A cet effet, remarquons que les conditions d'ordre n pour $f(x)$ entraînent celles d'ordre $n - 1$ pour la fonction

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Appliquons-lui donc la formule (1) pour l'ordre $n - 1$, nous trouvons

$$(2) \qquad \Delta^n f(x) = \Delta x^{n-1} [f^{(n-1)}(x + \Delta x + \theta[n-1]\Delta x) - f^{(n-1)}(x + \theta[n-1]\Delta x)]$$

Transformons enfin la différence entre crochets par la formule des accroissements finis (dont l'emploi est légitimé par les conditions d'ordre n), nous obtiendrons la formule (1).

La formule (2) conduit à un autre résultat important. Les conditions d'ordre $n - 1$ qu'elle suppose auront lieu pour $|\Delta x|$ suffisamment petit, si $f^{(n)}(x)$ a une valeur *déterminée* et *finie*. On a, dans ce cas, par définition de $f^{(n)}(x)$, les ε tendant vers 0 avec Δx,

$$f^{(n-1)}(x + \Delta x + \theta [n - 1] \Delta x) - f^{(n-1)}(x) = (1 + \theta n - \theta) \Delta x f^{(n)}(x) + \varepsilon' \Delta x,$$

$$f^{(n-1)}(x + \theta [n - 1] \Delta x) - f^{(n-1)}(x) = (\theta n - \theta) \Delta x f^{(n)}(x) + \varepsilon'' \Delta x,$$

et, en substituant dans (2) la différence de ces deux quantités,

$$\Delta^n f(x) = \Delta x^n [f^{(n)}(x) + \varepsilon], \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta^n f}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x).$$

Donc la dérivée $n^{\text{ième}}$, supposée finie et déterminée en un point, est la limite du rapport de la différence $n^{\text{ième}}$ de la fonction par la puissance $n^{\text{ième}}$ de la différence de la variable, quand cette différence, supposée indépendante de x, tend vers zéro.

119. Dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des fonctions élémentaires. — La détermination d'une dérivée d'ordre quelconque pour une fonction élémentaire ou composée, ne peut présenter d'autre difficulté que la longueur des calculs, si cet ordre est donné numériquement. Mais, si l'on veut exprimer la dérivée $n^{\text{ième}}$ en fonction de n, n restant arbitraire, le problème est plus difficile. Toutefois, pour quelques fonctions élémentaires, la solution est simple.

I. On a trouvé $Dx^a = ax^{a-1}$; on en tire successivement

$$D^2x^a = a(a-1)x^{a-2},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$D^n x^a = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n}.$$

Si a est entier et > 0, cette dérivée se réduira à la constante $a!$ pour $n = a$, et sera nulle pour $n > a$. Donc *la dérivée $n^{ième}$ d'un polynome de degré $< n$ est identiquement nulle.*

II. De $D\operatorname{Log}x = x^{-1}$, on tire, par la règle précédente,

$$D^n \operatorname{Log} x = D^{n-1}x^{-1} = (-1)(-2)\dots(-n+1)x^{-n}$$
$$D^n \operatorname{Log} x = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

III. La formule $DA^x = A^x \operatorname{Log} A$ donne

$$D^n A^x = A^x(\operatorname{Log} A)^n, \qquad D^n e^x = e^x.$$

IV. On a trouvé

$$D\sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

On dérive en ajoutant $\frac{\pi}{2}$ à l'argument, donc

$$D^n \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

V. On a, de même,

$$D\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad D^n \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

VI. On a trouvé

$$D \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}; \quad \text{donc} \quad D^n \operatorname{arc\,tg} x = D^{n-1}\frac{1}{1+x^2}.$$

Mais on a, en introduisant les imaginaires,

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right),$$

$$D^{n-1}\frac{1}{1+x^2} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right].$$

On se débarrasse des imaginaires en posant

$$x - i = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{1+x^2} \\ \varphi = \operatorname{arc\,cot} x\,; \end{array} \right.$$

il vient, par la formule de Moivre,

$$\frac{1}{(x-i)^n} = \frac{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}{\rho^n}, \quad \frac{1}{(x+i)^n} = \frac{\cos n\varphi - i\sin n\varphi}{\rho^n}.$$

Par conséquent,

$$D^{n-1} \frac{1}{1+x^2} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\rho^n} \sin n\varphi,$$

$$D^n \operatorname{arc\,tg} x = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin (n \operatorname{arc\,cot} x).$$

Remarque. — Le calcul des dérivées $n^{ièmes}$ peut être rattaché à la formule de Taylor. On en trouvera des exemples dans le chapitre suivant.

120. Dérivée $n^{ième}$ d'un produit. Formule de Leibniz. — Soit uv le produit de deux fonctions de x ; on a

$$D.uv = v\,Du + u\,Dv.$$

Dérivons ; il vient, par la règle précédente,

$$D^2 uv = v D^2 u + 2\,Du.Dv + u\,D^2 v.$$

Chaque terme de ces deux premières dérivées et aussi des suivantes, est le produit d'une dérivée de u par une dérivée de v, en regardant u et v eux-mêmes comme des dérivées d'ordre 0.

Mais, dans la dérivée première Duv, la somme des indices de dérivation est égale à 1 dans chaque terme ; dans la dérivée seconde, elle est égale à 2 ; on voit de suite qu'elle sera égale à n dans la dérivée $n^{ième}$. On peut donc poser

(1) $$D^n uv = A_0\, u\, D^n v + A_1\, Du\, D^{n-1} v + A_2\, D^2 u\, D^{n-2} v + \cdots,$$

les lettres A désignent des coefficients numériques à déterminer. Faisons, pour cela, α étant une constante,

$$u = e^{\alpha x}, \qquad v = e^x, \qquad \text{d'où} \qquad uv = e^{(1+\alpha)x},$$

$$D^n uv = (1+\alpha)^n e^{(1+\alpha)x},$$

$$D^k u\, D^{n-k} v = \alpha^k e^{\alpha x}.e^x = \alpha^k e^{(1+\alpha)x}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1) ; elle devient, après suppression du facteur commun $e^{(1+\alpha)x}$,

$$(1+\alpha)^n = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots$$

Donc, α étant une indéterminée, les coefficients A_0, A_1, A_2,... sont ceux du binome. On peut ainsi donner à l'équation (1) la forme symbolique suivante :

$$D^n uv = (Du + Dv)^n.$$

Mais on convient d'observer les conditions suivantes dans le développement du second membre : 1° on écrira Du et Dv dans tous les termes, même dans les termes extrêmes où l'un d'eux reçoit l'exposant 0 ; 2° on remplacera ensuite Du^p par D$^p u$, Dv^q par D$^q v$ et enfin, D$^o u$ par u et D$^o v$ par v.

121. Propriétés des dérivées d'une fonction rationnelle. — Soit z une variable complexe ; une fonction rationnelle de z

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

est le quotient de deux polynomes P et Q sans racine commune. Soit a une racine de degré m de P, nous disons que c'est une racine de degré m de $f(z)$. Nous avons alors

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z),$$

et $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle, *finie et non nulle* pour $z = a$. Dérivons ; il vient

$$f'(z) = (z - a)^{m-1}[m\varphi(z) + (z - a)\varphi'(z)].$$

La quantité entre crochets est une fraction rationnelle qui ne s'annule plus pour $z = a$; d'où le théorème suivant :

I. *Toute racine de degré m d'une fonction rationnelle $f(z)$ est une racine de degré $(m - 1)$ de sa dérivée ; en particulier, une racine simple de $f(z)$ ne sera plus racine de sa dérivée.*

Si l'on applique ce théorème, de proche en proche, aux dérivées successives de $f(z)$, on est conduit au suivant :

II. *Toute racine de degré m de $f(z)$ est commune à $f(z)$ et à ses $m - 1$ premières dérivées. Réciproquement, toute racine commune à $f(z)$ et à ses $(m - 1)$ premières dérivées et qui n'annule pas la dérivée d'ordre m, est une racine de degré m de $f(z)$.*

Ces théorèmes jouent un rôle important en algèbre, dans le cas particulier où $f(z)$ se réduit à un polynome.

CHAPITRE II.

Formule de Taylor. Applications diverses.

---

§ 1. Formules de Taylor et de Maclaurin.

122. Formule de Taylor. — Soit $f(x)$ une fonction continue et univoque d'une variable réelle x. La formule de Taylor a pour objet de développer $f(a+h)$ suivant les puissances successives de h jusqu'à un certain ordre. Pour l'ordre n, cette formule est la suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} f(a+h) = f(a) + \dfrac{h}{1} f'(a) + \dfrac{h^2}{1.2} f''(a) + \cdots \\ \qquad \cdots + \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \dfrac{h^n}{n!} \mathrm{M}. \end{cases}$$

Il faut supposer les dérivées de $f(x)$ finies et déterminées au point a jusqu'à l'ordre $n-1$, alors cette formule définit la quantité M en fonction de h supposé différent de 0.

Le plus souvent h peut avoir un signe quelconque dans la formule (1) et les dérivées successives de $f(x)$ sont supposées uniques au point a. Mais, si h est exclusivement positif, la formule ne suppose que l'existence des dérivées successives *à droite* au point a, et il doit être entendu que $f'(a)$, $f''(a)$,... sont alors des dérivées *à droite*. Ce seraient, par contre, des dérivées *à gauche* si h était exclusivement négatif.

Le développement de Taylor se caractérise par la propriété suivante, dont l'énoncé se précise en tenant compte de l'observation précédente.

Théorème. — *Quand h positif tend vers 0, la quantité M tend vers la dérivée à droite $f^{(n)}(a)$, finie ou infinie, mais supposée existante.*

1° Si $f^{(n)}(a)$ est finie, soit ε un nombre positif et formons la fonction de h :

$$\varphi(h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(a) + \varepsilon] - f(a+h).$$

Cette fonction et ses $n - 1$ premières dérivées (à droite) sont nulles au point $h = 0$, tandis que l'on a, pour sa dérivée $n^{ième}$ (à droite), $\varphi^{(n)}(0) = \varepsilon > 0$. Donc, pour h positif et suffisamment petit, $\varphi^{(n-1)}(h)$ est $> \varphi^{(n-1)}(0)$ et, par conséquent, positif ; auquel cas $\varphi^{(n-2)}(h)$, étant croissant, est positif aussi, et ainsi de suite de proche en proche jusque $\varphi(h) > 0$. Au contraire, tout cela devient négatif si l'on remplace ε par $-\varepsilon$. D'où il suit que, pour h positif assez petit, $f(a + h)$ est compris entre les deux expressions :

$$f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(a) \pm \varepsilon]$$

et par suite, M est compris entre $f^{(n)}(a) \pm \varepsilon$. Donc, ε étant aussi petit qu'on veut, M a pour limite $f^{(n)}(a)$ quand h positif tend vers 0.

2° Si $f^{(n)}(a) = -\infty$, soit A un nombre négatif arbitraire et formons la fonction :

$$\varphi(h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} \mathrm{A} - f(a+h).$$

Nous aurons encore $\varphi^{(n)}(0) = \mathrm{A} - f^{(n)}(a) > 0$, de sorte que les dérivées d'ordre moindre et $\varphi(h)$ lui-même sont de nouveaux positifs pour h positif et suffisamment petit, auquel cas M est $<$ A. Donc M devenant inférieur à tout nombre assignable quand h positif tend vers 0, M tend vers $-\infty$. De même, M tendrait vers $+\infty$ si telle était la valeur de la dérivée à droite $f^{(n)}(a)$, ce cas se ramenant d'ailleurs au précédent par le simple changement de signe de $f(x)$.

Si l'on remplace h par $-h$ dans la formule (1), le théorème précédent est évidemment remplacé par le suivant :

Quand h négatif tend vers 0, la quantité M *tend vers la dérivée à gauche $f^{(n)}(a)$, finie ou infinie, mais supposée existante.*

Unicité du développement. — Quand $f^{(n)}(a)$ est finie, la formule de Taylor exprime $f(a + h)$ par un développement

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 h + \mathrm{A}_2 h^2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1} h^{n-1} + \mathrm{M}h^n,$$

où les A sont des constantes par rapport à h et où M est borné quand h tend vers 0.

Un tel développement n'est possible que d'une seule manière, donc par la formule de Taylor.

Supposons, en effet, qu'il y en ait deux :

$$A_0 + A_1 h + \cdots + M h^n = a_0 + a_1 h + \cdots + m h^n.$$

Nous allons montrer qu'ils sont identiques termes pour termes.

Faisant tendre h vers 0 et observant que M et m sont bornés, il vient d'abord $A_0 = a_0$. Supprimant ces termes, divisant par h et faisant encore tendre h vers 0, il vient $A_1 = a_1$, etc.

123. Reste de la formule de Taylor. — Le dernier terme de la formule (1), lequel en a n avant lui, s'appelle le *terme complémentaire* ou le *reste* de la formule et il se désigne par R_n. La formule (1) devient ainsi

$$(2) \quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

et nous avons une première expression de R_n

$$R_n = \frac{h^n}{n!} M.$$

Nous savons seulement que M tend vers $f^{(n)}(a)$ quand h tend vers 0, et ceci ne suppose aucune autre condition que la seule existence de $f^{(n)}(a)$. Mais cette première expression ne nous donne aucun renseignement sur la grandeur de R_n pour les valeurs finies de h. Il y a donc lieu de chercher de nouvelles expressions de R_n, capables de rendre ce service.

Il faut, pour cela, introduire de nouvelles conditions plus restrictives. Nous supposerons que $f^{(n-1)}(x)$ est continue dans l'intervalle de a à $a+h$ (limites comprises) et que $f^{(n)}(x)$ est seulement déterminée dans cet intervalle (limites exclues).

Avec ces conditions, on peut, comme nous allons le démontrer, donner à R_n l'expression suivante, connue sous le nom de *reste de Schlömilch :*

$$(3) \qquad R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\, p} f^{(n)}(a+\theta h)$$

Dans celle-ci, p est un nombre positif arbitraire mais $\leqslant n$, et un nombre compris entre 0 et 1.

Pour établir cette formule, on définit un nombre P par la condition

$$h^p P = R_n,$$

où R_n est défini par l'équation (2). On fait $a + h = b$ et l'on considère la fonction de x :

$$f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + (b-x)^p P.$$

Celle-ci (qui est *continue*) prend la même valeur $f(b)$ ou $f(a+h)$ pour $x = a$ et $x = b$. Donc sa dérivée (qui est *existante*) :

$$\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - p\,(b-x)^p P,$$

s'annule au point intermédiaire $\xi = a + \theta h$, en vertu du théorème de Rolle. De là, la valeur de P :

$$P = \frac{(b-\xi)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^n(\xi) = \frac{h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n}(a+\theta h),$$

qui substituée dans $h^p P$, fournit la valeur (3) de R_n.

On considère surtout deux cas particuliers :

Si $p = n$, on obtient le *reste de Lagrange* :

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h).$$

Si $p = 1$, on obtient le *reste de Cauchy* :

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta h).$$

Lorsque $f(x)$ est indéfiniment dérivable, on peut se donner n à volonté et, par conséquent, reculer R_n aussi loin qu'on veut. Lorsque ce terme peut être rendu suffisamment petit à condition de prendre n assez grand, la formule de Taylor donne un procédé commode pour évaluer approximativement les fonctions. Nous allons en voir des exemples un peu plus loin comme applications de la formule de Maclaurin.

Lorsque le terme complémentaire tend vers zéro quand n tend vers l'infini, on peut prolonger la formule indéfiniment ; le dernier terme disparaissant à la limite, on obtient l'expression de $f(a+h)$ en série convergente. La question du dévelop-

pement des fonctions en série illimitée de Taylor est d'une extrême importance, mais nous ne possédons pas encore les ressources analytiques nécessaires pour la traiter commodément. Nous y reviendrons, à la fin du volume, quand nous aurons exposé la théorie des séries.

124. Expressions diverses de la formule de Taylor. — 1° On peut remplacer dans la formule (2) la variable h par $x - a$; l'équation devient ainsi, en écrivant le reste de Lagrange,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!} f''(a) + \cdots \\ &+ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{n-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{n\,!} f^{(n)}[a + \theta(x-a)]. \end{aligned} \right.$$

Cette formule suppose $f^{(n-1)}(x)$ continue de a à x et $f^{(n)}(x)$ déterminée entre a et x seulement.

2° On peut aussi remplacer a par x dans la formule (2), puis faire passer $f(x)$ dans le premier membre. On trouve, avec le reste de Lagrange,

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n\,!} f^{(n)}(x + \theta h).$$

Supposons qu'on prenne $dx = h$; les termes successifs du second membre ne différeront que par les factorielles des différentielles successives de $f(x)$. Quant au premier membre, c'est l'accroissement $\Delta f(x)$ qui correspond à l'accroissement arbitraire dx de la variable x. La formule précédente peut donc s'écrire comme il suit :

$$(5)\quad \Delta f(x) = \frac{df(x)}{1} + \frac{d^2 f(x)}{2\,!} + \cdots + \frac{d^{n-1} f(x)}{(n-1)!} + \left[\frac{d^n f(x)}{n\,!}\right]_{x + \theta dx}.$$

Seulement, dans le dernier terme, on doit remplacer, ainsi que la notation l'indique, la variable x par $x + \theta dx$. La formule (5) donne l'expression la plus condensée du développement de Taylor et, comme on le verra, la plus générale.

125. Formule de Maclaurin. — C'est un cas particulier de celle de Taylor. On pose $a = 0$ et $h = x$ dans la formule (2) ; il vient

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2\,!} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \mathrm{R}_n.$$

Le reste R_n peut recevoir la forme de *Schlömilch* :

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(\theta x).$$

ou les formes particulières de *Lagrange* et de *Cauchy* :

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x), \qquad R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta x).$$

Cette formule suppose $f^{(n-1)}(x)$ continue de 0 à x et $f^{(n)}(x)$ déterminée entre 0 et x. Le nombre θ est compris entre 0 et 1.

Lorsque les dérivées de $f(x)$ sont déterminées et continues jusqu'à un ordre quelconque, il arrive souvent que le dernier terme, qui est seul inconnu, peut être rendu aussi petit qu'on veut en donnant à n une valeur assez grande. Dans ce cas, la formule de Maclaurin fournit un procédé d'évaluation commode de la fonction $f(x)$. Nous allons en montrer des exemples.

126. Application de la formule de Maclaurin à quelques fonctions simples. — I. Exponentielle e^x. Faisons $f(x) = e^x$ dans la formule de Maclaurin : les dérivées reproduisant la fonction, $f^{(k)}(0) = 1$ et nous obtenons, avec le reste de Lagrange,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

Quel que soit x, ce reste tend vers 0 quand n tend vers l'infini, car $x^n : n!$ a pour limite 0, en vertu de l'inégalité (*) $n! > (\sqrt{n})^n$, qui montre que la factorielle $n!$ croît infiniment plus vite que la puissance x^n.

Pour $x = 1$, on trouve la formule propre au calcul de e :

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!}.$$

Le dernier terme est $< 3 : n!$ (puisque e est < 3) et devient aussi petit que l'on veut, à condition de prendre n assez grand.

(*) Multiplions entre elles, facteur par facteur, les deux factorielles $n!$ où les facteurs seront rangés dans l'ordre inverse ; $(n!)^2$ sera le produit de n facteurs de la forme

$$p(n-p+1) \geqslant n-p+p = n$$

Donc $(n!)^2$ est $> n^n$.

Donc la formule permet de calculer le nombre e au degré d'approximation que l'on désire.

Remarque. — On tire de la formule précédente, en multipliant ses deux membres par $(n-1)!$,

$$(n-1)!\,e = \text{nombre entier} + \frac{e^{\theta}}{n}.$$

Cette relation prouve que e est *irrationnel*, car, si e était rationnel, il serait le quotient $p : q$ de deux entiers et le premier membre de la relation serait entier pour $n > q$, tandis que le second est fractionnaire pour $n > 3$ (donc *a fortiori* $> e^{\theta}$).

II. Exponentielle A^x. En changeant x en x Log A dans la formule précédente, on a

$$A^x = e^{x \operatorname{Log} A} = 1 + \frac{x \operatorname{Log} A}{1} + \cdots + \frac{(x \operatorname{Log} A)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x \operatorname{Log} A)^n}{n!} A^{\theta x}.$$

III. Fonction sin x. Si $f(x) = \sin x$, on a (n° 119)

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right):$$

Pour $x = 0$, les valeurs de $f(x)$ et de ses dérivées successives forment la suite périodique à quatre termes : 0, 1, 0, — 1 ; 0, 1, 0, — 1 ;... Donc, si l'on suppose $n = 2k + 1$ dans la formule de Maclaurin et qu'on y substitue

$$f^{(2k+1)}(\theta x) = \sin\left[\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^k \cos \theta x,$$

on trouve, en écrivant le reste de Lagrange,

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos \theta x.$$

Le reste a pour limite 0 quand k augmente indéfiniment.

IV. Fonction cos x. Si $f(x) = \cos x$, on a (n° 119)

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Pour $x = 0$, les valeurs de $f(x)$ et de ses dérivées successives forment la suite périodique à quatre termes : 1, 0, — 1, 0, etc. Prenons donc $n = 2k$ dans la formule de Maclaurin, et faisons la substitution

$$f^{2k}(\theta x) = \cos\left(\theta x + 2k\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \cos\theta x,$$

il vient, avec le reste de Lagrange,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x.$$

Le reste a pour limite 0 quand k augmente indéfiniment.

V. Fonction Log $(1 + x)$. Prenant $f(x) = \text{Log}\,(1 + x)$, on a (n° 119)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

$$\text{Log}\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n.$$

Par la formule de Lagrange,

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^n;$$

et, par celle de Cauchy,

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

Ces formules supposent toutefois $x > -1$, sinon les dérivées cesseraient d'être déterminées dans l'intervalle $(x, 0)$ et la formule de Maclaurin ne serait plus applicable. Si x est positif et $\leqslant 1$, la formule de Lagrange montre que $|R_n|$ est $< 1 : n$; si x est négatif mais qu'on ait $x > -r > -1$, la formule de Cauchy montre que $|R_n|$ est $< r^n : (1 - r)$. Donc, dans ces deux cas, R_n peut être rendu aussi petit qu'on veut en prenant n assez grand, et le développement peut servir à calculer la fonction.

VI. Fonction $(1 + x)^m$. Formule du binome. On a, dans ce cas,

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n};$$

il vient donc

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{1.2\cdots(n-1)}x^{n-1} + R_n.$$

Par la formule de Lagrange,

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}$$

et, par celle de Cauchy,

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)} x^n (1+\theta x)^{m-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

Si m est entier et positif et si l'on suppose $n = m+1$, le dernier terme disparait, car le facteur $(m-n+1)$ s'annule. On retrouve ainsi la formule du binome de Newton. Si m est fractionnaire ou négatif, le développement peut être poursuivi aussi loin qu'on veut, pourvu que x soit > -1. Cette condition est nécessaire pour que la dérivée $f^{(n)}(x)$ soit déterminée dans l'intervalle $(0, x)$ quand n est $> m$, de sorte que, si elle n'était pas remplie, la formule ne serait plus légitime.

On voit, par la formule de Lagrange si $x > 0$, et par celle de Cauchy si $x < 0$, que R_n tend vers 0 avec le facteur

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)} x^n$$

quand n tend vers l'infini, pourvu que la valeur absolue de x soit < 1. En effet, quand on change n en $n+1$, ce facteur est multiplié par la quantité

$$\frac{m-n}{n} x = -\left(1 - \frac{m}{n}\right) x,$$

dont la valeur absolue a pour limite $|x|$ et devient, par conséquent, inférieure à un nombre positif $k < 1$ à partir d'une valeur suffisamment grande de n. Dès ce moment, la valeur absolue du facteur considéré décroît plus rapidement que les puissances successives de k et tend *a fortiori* vers 0.

127. Extension de la formule de Taylor aux fonctions rationnelles d'une variable complexe. — Considérons une fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

P et Q désignant deux polynomes sans racine commune. Si a n'est pas racine de Q, la différence

$$f(z) - \left[f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a) + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right]$$

est une fonction rationnelle de z ; elle s'annule ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées pour $z = a$; donc elle admet $z = a$ comme racine de degré n (n° 121) et elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{(z-a)^n}{n!} M,$$

M désignant une fraction rationnelle finie pour $z = a$ (n° 121). Il vient ainsi

$$(6)\quad f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1}f'(a)+\cdots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(z-a)^n}{n!}\,\mathrm{M}$$

et la *formule de Taylor* se trouve étendue au cas où la variable est complexe.

De plus, pour $z = a$, on a encore $\lim \mathrm{M} = f^{(n)}(a)$, car, en comparant la formule (6) avec la formule analogue pour l'ordre $n + 1$, où M_1 sera l'analogue de M, on a

$$\mathrm{M} = f^{(n)}(a) + \frac{z-a}{n+1}\mathrm{M}_1.$$

Remarques. — 1° Dans la formule (6), le dénominateur de la fraction M est le même que celui de $f(z)$, car il n'y a pas d'autre terme fractionnaire dans la formule.

2°) Si $f(z)$ ou, plus généralement, si $f(z) : (z - a)^n$ est une fraction proprement dite, M est aussi une fraction proprement dite. En effet, divisons tous les termes de la formule (6) par $(z - a)^n$; M sera égal à une somme de termes qui ont pour limite zéro et aura lui-même pour limite zéro pour $z = \infty$, ce qui ne peut avoir lieu que si M est une fraction proprement dite.

3°) Le développement de $f(z)$ suivant les puissances de $(z - a)$ ne peut se faire que par la formule (6), moyennant la condition relative à M, car la démonstration faite au n° 122 s'applique aussi bien au cas actuel.

128. Emploi de la méthode des coefficients indéterminés. Développement d'une fonction de fonction. — Dans bien des cas, on se propose seulement de connaître la loi de formation des termes successifs de la formule de Taylor et l'on ne s'inquiète pas de l'expression du dernier terme. Le théorème du n° 122 qui établit l'unicité du développement permet alors de se servir avec avantage de la méthode des coefficients indéterminés. Proposons-nous, par exemple, de trouver le développement d'une fonction de fonction.

Soit $u = f(x)$, puis $\mathrm{F}(u)$ une fonction composée de x ; supposons connus les développements :

$$\mathrm{F}(u+k) - \mathrm{F}(u) = \mathrm{A}_1 k + \mathrm{A}_2 k^2 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1} k^{n-1} + \mathrm{M} k^n,$$
$$f(x+h) - f(x) = a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_{n-1} h^{n-1} + m h^n;$$

nous allons en déduire celui de F $(u + k)$ suivant les puissances de h dans l'hypothèse où $k = f(x+h) - f(x)$. Pour cela, remplaçons, dans le premier développement, k par sa valeur tirée du second, il vient

$$\begin{aligned} F[f(x+h)] - F[f(x)] = A_1 (a_1 h + a_2 h^2 + \dots) \\ + A_2 (a_1 h + a_2 h^2 + \dots)^2 \\ + A_3 (a_1 h + a_2 h^2 + \dots)^3 \\ + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Il suffit d'ordonner par rapport aux puissances de h jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ pour obtenir le résultat demandé. Le dernier terme est un polynome en M et m qui ne présente aucun intérêt particulier.

129. Détermination des dérivées $n^{\text{ièmes}}$. Dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction. — Le développement de $f(x+h)$ suivant les puissances de h et le calcul de $f^{(n)}(x)$ sont deux problèmes équivalents. En effet, cette dérivée s'obtient comme coefficient de $h^n : n!$ dans ce développement.

Comme exemple, appliquons le calcul du numéro précédent à la détermination de la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction F(u), u étant égal à $f(x)$.

Le coefficient de h^n dans le second membre de la formule qui termine le numéro précédent, peut se mettre sous la forme

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \mathcal{S}_k,$$

en désignant par $\mathcal{S}_k$ le coefficient de h^n dans l'expression

$$(a_1 h + a_2 h^2 + \dots)^k.$$

La quantité $\mathcal{S}_k$ se calculera donc par la formule suivante :

$$\mathcal{S}_k = \Sigma \frac{k!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\dots} (a_1)^\alpha\ (a_2)^\beta\ (a_3)^\gamma \dots,$$

dans laquelle la sommation s'étend à toutes les décompositions de k en une somme d'entiers positifs

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = k,$$

satisfaisant, en même temps, à la condition

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = n.$$

La dérivée $D_x^n F(u)$ s'obtiendra donc en multipliant par $n!$ le coefficient de h^n. On trouve ainsi, après avoir remplacé les quantités A et a par leurs expressions sous forme de dérivées, la formule de FAA DI BRUNO :

$$D_x^n F(u) = \sum_{k=1}^{n} F^{(k)}(u)\, P_k$$

$$P_k = \frac{n!}{k!} \mathcal{S}_k = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\, \beta! \ldots} \left(\frac{Du}{1\,!}\right)^\alpha \left(\frac{D^2 u}{2!}\right)^\beta \ldots$$

Donc P_k est un polynome en Du, $D^2u, \ldots$ de degré k et de poids n, c'est-à-dire que la somme des indices de dérivation est n dans chaque terme. On n'obtient ce polynome sous forme explicite que dans des cas particuliers. (Voir les exercices qui suivent).

EXERCICES.

1. Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(e^x)$ — Soient $e^x = u$ et

$$k = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1) = e^x\left(h + \frac{h^2}{1.2} + \cdots\right);$$

il faut chercher le coefficient de $h^n : n!$ dans

$$f(u+k) - f(u) = \frac{f'(u)}{1} k + \frac{f''(u)}{1.2} k^2 + \cdots$$

Comme k renferme h en facteur, h^n ne se trouvera que dans les n premiers termes. Le coefficient de $h^n : n!$ dans

$$k^m = e^{mx}(e^h - 1)^m = e^{mx}\left(e^{mh} - me^{(m-1)h} + \frac{m(m-1)}{1.2} e^{(m-2)h} - \ldots\right)$$

s'obtient en développant séparément ces exponentielles. Il sera de la forme $A_m e^{mx}$, où A_m est un coefficient numérique :

$$A_m = m^n - m(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m - \ldots$$

Donc le coefficient de $h^n : n!$ dans $f(u+k) - f(u)$ sera :

$$D^n f(e^x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{A^m}{m!} e^{mx} f^{(m)}(u).$$

2. Dérivée $n^{\text{ième}}$ de e^{ax^2}. — On a

$$e^{a(x+h)^2} - e^{ax^2} = e^{ax^2}(e^{ah(2x+h)} - 1)$$

$$= e^{ax^2}\left[1 + \frac{ah(2x+h)}{1} + \frac{a^2h^2(2x+h)^2}{1.2} + \cdots - 1\right]$$

Cherchant le coefficient de $h^n : n!$, on trouve

$$D^n e^{ax^2} = e^{ax^2}\Big[(2x)^n a^n + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}a^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.}(2x)^{n-4}a^{n-2} + \cdots\Big]$$

3. Dérivée n^{ieme} de $e^{\frac{a}{x}}$. — On a

$$e^{\frac{a}{x+h}} - e^{\frac{a}{x}} = e^{\frac{a}{x}}\Big[e^{-\frac{ah}{x(x+h)}} - 1\Big]$$

$$= e^{\frac{a}{x}}\Big[1 - \frac{ah}{x^2}\Big(1+\frac{h}{x}\Big)^{-1} + \frac{1}{2!}\Big(\frac{ah}{x^2}\Big)^2\Big(1+\frac{h}{x}\Big)^{-2} + \cdots - 1\Big]$$

On développe les puissances négatives par la formule du binome. Alors, cherchant le coefficient de $h^n : n!$, on trouve

$$D^n e^{\frac{a}{x}} = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}}\Big[a^n + \frac{n}{1}(n-1)xa^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2)x^2a^{n-2} + \cdots\Big].$$

4. Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x^2)$. — Soit $x^2 = u$; on aura

$$D^n f(x^2) = (2x)^n f^{(n)}(u) + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} f^{n-1}(u) + \cdots$$

Cette dérivée s'obtient en remplaçant dans celle de e^{ax^2} (Exercice 2) les puissances de a par les dérivées successives de $f(u)$ et en y supprimant le facteur e^{ax^2}. On le justifie en observant que l'on a (n° 129)

$$D^n f(x^2) = \sum_1^n f^{(k)}(u)\, P_k .$$

Comme P_k est indépendant de f, on le détermine en choisissant $f(u) = e^{au}$, auquel cas P_k sera le coefficient de $a^k e^{au}$.

5. Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f\left(\frac{1}{x}\right)$. — Méthode analogue. Soit $\frac{1}{x} = u$; on obtient la dérivée demandée au moyen de celle de $e^{\frac{a}{x}}$. Il faut supprimer dans celle-ci (Exercice 3) le facteur $e^{\frac{a}{x}}$ et remplacer les puissances successives de a par les dérivées successives de $f(u)$.

6. Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(\text{Log } x)$. — Soit $u = \text{Log } x$; si la lettre D désigne des dérivées par rapport à u et si l'on convient d'effectuer les multiplications algébriquement, on a la formule symbolique :

$$D_x^n f(\text{Log } x) = \frac{D(D-1)\ldots(D-n+1)f(u)}{x^n}.$$

En effet, on a d'abord (n° 129)

$$(1) \qquad D^n f(\mathrm{Log}\, x) = \Sigma P_k f^{(k)}(u).$$

Faisant, en particulier, $f(u) = e^{au}$, ce qui ne change pas P_k,

$$(2) \qquad D^n e^{a \,\mathrm{Log}\, x} = \Sigma P_k a^k e^{au}.$$

Mais on a, d'autre part,

$$(3) \qquad D^n e^{a\,\mathrm{Log}\, x} = D^n x^a = a(a-1)\ldots(a-n+1)\, x^{a-n}$$
$$= a(a-1)\ldots(a-n+1)\frac{e^{au}}{x^n}.$$

Le second nombre de (1) se déduit de celui de (2), en supprimant le facteur e^{au} et en remplaçant a^k par $D^k f(u)$. Si, au lieu de faire ce changement dans (2), on le fait dans (3), on obtient la formule à démontrer.

§ 2. Vraies valeurs des expressions indéterminées.

130. Définition. — Soit $f(x)$ une fonction de variable réelle qui devient indéterminée pour $x = a$; on nomme *vraie valeur* de cette expression pour $x = a$ la limite vers laquelle elle tend quand x tend vers a. On devra d'ailleurs spécifier dans la définition si x tend vers a d'une manière quelconque, ou bien seulement par des valeurs $> a$, ou bien par des valeurs $< a$,

Ainsi, par exemple, la vraie valeur de $\sin x : x$ pour $x = 0$ est 1, et x tend alors vers 0 d'une manière quelconque. La vraie valeur de $x \mathrm{Log}\, x$ pour $x = 0$ est 0, mais alors x tend vers 0 en restant positif (la fonction n'existant plus pour x négatif).

La définition de la *vraie valeur* s'applique aussi aux fonctions rationnelles d'une variable complexe. Mais, sauf le cas particulier qui va être indiqué, nous supposerons dans tout ce qui suit que la variable est réelle.

131. Forme $\frac{0}{0}$. — Cette forme se rencontre quand les deux termes d'une fraction $f(x) : F(x)$ sont des fonctions continues qui s'annulent simultanément pour $x = a$. La vraie valeur se détermine par l'application d'une règle importante, connue sous le nom de *règle de l'Hospital* (*), et qui consiste à substituer au

(*) Le Marquis de l'Hospital n'a énoncé cette règle que sous forme géométrique et dans le cas le plus simple et il l'avait empruntée à Jean Bernoulli.

rapport des fonctions celui de leurs dérivées. Mais cette règle peut être présentée sous deux formes différentes ; la première est plus simple, mais la seconde se prête à des extensions que ne permet pas la première.

Première règle. — *Si les deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ s'annulent au point a ainsi que toutes leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre $n-1$, si, de plus, les dérivées d'ordre n existent au point a mais n'y sont ni toutes deux nulles ni toutes deux infinies, la vraie valeur (finie ou infinie) de $f(x) : F(x)$ au point a sera $f^{(n)}(a) : F^{(n)}(a)$, c'est-à-dire que*

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{F^{(n)}(a)}.$$

Cette règle résulte de la formule de Taylor et s'applique, par suite, aussi aux fonctions rationnelles d'une variable complexe.

Si l'on pose $x = a + h$ et qu'on développe $f(a+h)$ et $F(a+h)$ jusqu'à l'ordre n, les développements (n° 122) se réduisent à

$$f(a+h) = \frac{h^n}{n!} M, \qquad F(a+h) = \frac{h^n}{n!} M',$$

où M et M′ ont respectivement pour limites les dérivées $f^{(n)}(a)$ et $F^{(n)}(a)$ supposées existantes quand h tend vers 0. Il s'ensuit

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \lim \frac{M}{M'} = \frac{f^{(n)}(a)}{F^{(n)}(a)}.$$

Dans le cas des variables réelles, la formule précédente conserve un sens, même si les dérivées d'ordre n sont différentes à droite et à gauche. Elle demeure vraie pour les dérivées à droite si h est positif, et pour les dérivées à gauche si h est négatif.

Cette règle ne suppose aucune autre condition que celles contenues dans son énoncé. Mais elle suppose a fini et ne s'étend pas au cas où $a = \infty$. D'autre part, si $F^{(n)}(a) = 0$, elle montre que la vraie valeur est infinie, mais le signe reste inconnu. Enfin elle ne donne rien si les dérivées n'existent pas au point a.

La seconde règle exige des conditions plus délicates et s'appuie sur la formule de Cauchy (n° 108).

Deuxième règle. — *Si $f(x)$ et $F(x)$, nuls au point a, ont des dérivées $f'(x)$ et $F'(x)$ dans le voisinage du point a, la vraie valeur de $f(x):F(x)$ au point a sera la limite du quotient $f'(x):F'(x)$ pour $x=a$, pourvu que cette limite soit déterminée.*

En particulier, si $f'(a):F'(a)$ est encore de la forme $0:0$, la vraie valeur de $f(x):F(x)$ sera la même que celle de $f''(x):F''(x)$ supposée déterminée.

Cette règle subsiste quand on considère seulement les valeurs de x qui sont $> a$, ou bien celles qui sont $< a$.

Cette seconde règle est plus utile que la première, parce qu'elle laisse libre le choix du procédé à suivre pour trouver la limite du quotient des dérivées : suppression de facteurs communs, emploi de la première règle, application répétée de la seconde, etc.

Elle résulte immédiatement de la formule de Cauchy (n° 108), qui, $f(a)$ et $F(a)$ étant nuls, se réduit à

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{F'(a+\theta h)} \quad (0<\theta<1)$$

et il suffit d'observer que θh est une même quantité dans les deux termes de la fraction, qu'elle a le signe de h et qu'elle tend vers 0 avec lui.

Mais cette règle est soumise aux mêmes conditions que la formule de Cauchy : 1° Les dérivées doivent être déterminées et finies au voisinage du point a (celui-ci pouvant faire exception) ; 2° le quotient $f'(x):F'(x)$ ne prend, quand x tend vers a, qu'un nombre limité de fois la forme $0:0$ et, par conséquent, ne la prend plus à partir d'une valeur de x suffisamment voisine de a.

Si le quotient $f'(x):F'(x)$ n'avait pas de limite déterminée quand x tend vers a, il ne faudrait pas en conclure que la fraction proposée n'en a pas, parce que θh tend vers 0 suivant une loi inconnue dans la dernière équation, et cette loi peut être telle que le second membre ait une limite.

Cas où $a=\infty$. — Lorsque l'existence des dérivées et les conditions précédentes subsistent quand x augmente indéfiniment, la seconde règle reste applicable au cas où $a=+\infty$ et au cas où $a=-\infty$. Ainsi, dans le premier cas par exemple, on a

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=+0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{F\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

On est ramené au cas où a est fini. La règle s'applique et donne

$$\lim_{x=+0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{F\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x=+0} \frac{-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

132. Forme $\frac{\infty}{\infty}$. — *La règle de l'Hospital (deuxième règle) s'applique aussi à la détermination de la vraie valeur des fractions $f(x) : F(x)$ dont les deux termes croissent indéfiniment en valeur absolue, pour une valeur particulière a de x.*

Cette règle, qui suppose l'existence des dérivées (sauf au point a) reste toujours soumise aux mêmes restrictions : 1° elle conduit à un résultat déterminé, fini ou infini ; 2° les dérivées des deux fonctions sont finies et ne s'annulent pas simultanément dans le voisinage de $x = a$.

Pour démontrer la règle, donnons-nous deux valeurs x_0 et x suffisamment rapprochées de a, pour que les deux dérivées $f'(x)$ et $F'(x)$ soient déterminées dans leur intervalle et n'aient pas de racines communes (les deux valeurs x_0 et x seront donc du même côté du point a). Nous pourrons appliquer la formule de Cauchy, et il viendra (ξ étant intermédiaire entre x_0 et x)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{F(x) - F(x_0)} = \frac{f(x)}{F(x)} \frac{1 - f(x_0) : f(x)}{1 - F(x_0) : F(x)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

On tire de là

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \frac{1 - F(x_0) : F(x)}{1 - f(x_0) : f(x)}.$$

Supposons, en premier lieu, que $f'(x) : F'(x)$ ait une limite finie, A, pour $x = a$. Nous allons montrer que le second membre de cette équation peut être rendu aussi voisin qu'on veut de A, à condition que x soit suffisamment voisin de a. En effet, il se compose d'un produit de deux fractions dont la première est aussi voisine qu'on veut de A, et la seconde aussi voisine qu'on veut de 1. C'est ce que nous allons montrer.

D'abord on peut rendre ξ aussi voisin qu'on veut de a, à condition de prendre x_0 et x suffisamment voisins de a ; alors la première fraction $f'(\xi) : F'(\xi)$ est aussi voisine qu'on veut de sa limite A. Par exemple, on peut rendre la différence $< \varepsilon$.

Ensuite, on peut, sans cesser de satisfaire à cette condition, laisser x_0 fixe et faire tendre x vers a, alors la seconde fraction a ses deux termes qui tendent vers l'unité, car $f(x_0)$ et $F(x_0)$ sont fixes tandis que $f(x)$ et $F(x)$ sont infinis. Donc la seconde fraction est aussi voisine qu'on veut de l'unité.

Il résulte de là que $f(x) : F(x)$ a pour limite A quand x tend vers a.

En second lieu, si le rapport des dérivées tend vers l'infini, la formule que nous venons de discuter montre que $f(x) : F(x)$ est aussi grand qu'on veut avec $f'(\xi) : F'(\xi)$. La règle est encore justifiée.

Remarques. — 1°) La règle de l'Hospital (deuxième règle) reste applicable au cas où $a = \infty$, dans les mêmes conditions que pour la forme $0 : 0$ et la démonstration est la même (n° 131).

2°) L'application de la règle de l'Hospital au cas $\infty : \infty$ peut paraître illusoire, car, si une fonction $f(x)$ devient infinie pour une valeur finie a de x, on sait que sa dérivée ne peut pas conserver une valeur finie quand x tend vers a (n° 106). Cependant cette règle est souvent utile, parce que le rapport des dérivées peut se prêter à des transformations qui mettent sa vraie valeur en évidence, tandis qu'elles ne s'appliquent pas au rapport des fonctions.

133. Cas où la seconde règle est en défaut. — Une des conditions stipulées peut venir à manquer et l'application inconsidérée de la seconde règle conduire à des résultats faux.

1°) Le rapport des fonctions peut avoir une limite quand x tend vers a, sans que celui des dérivées en ait une. Tel est le cas pour les deux rapports suivants, le premier de la forme $0 : 0$ et le second de la forme $\infty : \infty$:

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1.$$

Les rapports des dérivées ne tendent vers rien, ce sont respectivement :

$$\frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}, \qquad \frac{1 - \cos x}{1}.$$

Toutefois, si les conditions de la seconde règle n'ont pas lieu, celles de la première sont satisfaites pour le premier rapport : les dérivées des deux termes sont 0 et 1 pour $x = 0$ (n° 99) et leur quotient donne la vraie valeur, 0, de la fraction.

2°) Réciproquement, le rapport des dérivées peut avoir une limite sans que celui des fonctions en ait une. Le cas est plus rare, mais en voici un exemple. Le rapport

$$\frac{e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x)}{e^{-x}(\cos x + \sin x)} = e^{-x}\frac{1 + 2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

prend la forme $0 : 0$ quand x tend vers l'infini. Sa vraie valeur est indéterminée, car $(1 + 2 \operatorname{tg} x) : (1 + \operatorname{tg} x)$ varie indéfiniment de $+\infty$ à $-\infty$. Au contraire, le rapport des deux dérivées :

$$\frac{-5\, e^{-2x} \sin x}{-2\, e^{-x} \sin x} = \frac{5}{2} e^{-x}$$

a pour limite 0. La règle est en défaut, parce que les deux dérivées ont un facteur commun, $\sin x$, qui s'annule une infinité de fois quand x tend vers ∞.

134. Autres formes d'indétermination. — Les autres formes d'indétermination les plus importantes sont :

$$\infty - \infty, \qquad 0.\infty \quad \text{et} \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

La première se présente lorsque les deux termes de la différence $f(x) - F(x)$ augmentent indéfiniment pour $x = a$; la seconde, lorsque des deux facteurs du produit $f(x).\,F(x)$ l'un tend vers zéro et l'autre vers l'infini. Ces deux formes se ramènent immédiatement à la forme $0 : 0$ ou $\infty : \infty$, par de simples transformations algébriques, en écrivant ces expressions sous forme de fraction. Dans le premier cas, on pourra toujours poser, par exemple,

$$f(x) - F(x) = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{f}\right) : \left(\frac{1}{F.f}\right).$$

Quant aux trois dernières formes d'indétermination, on cher-

chera la vraie valeur de leur logarithme, lequel sera de l'une des formes déjà examinées. On sera donc conduit, dans tous les cas, à appliquer le règle de l'Hospital.

135. Utilisation de la formule de Taylor. — Dans la plupart des cas où l'indétermination ne disparaît qu'après un usage répété de la règle de l'Hospital, une application judicieuse de la formule de Taylor conduira plus rapidement au résultat que la règle en question. Ainsi, quand la fonction $\varphi(a+h)$ qui devient indéterminée pour $h=0$ est composée au moyen de fonctions développables par la formule de Taylor, en substituant à ces fonctions ou à quelques-unes d'entre elles leur développement suivant les puissances de h et en poussant ce développement suffisament loin, il pourra se faire, en supprimant les puissances de h qui se détruisent, que l'indétermination disparaisse et l'on obtiendra la vraie valeur cherchée. C'est précisément ce que nous avons fait (n° 131) pour établir la première règle.

Voici un exemple. Si l'on remplace $\sin x$ par

$$\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right]$$

et supprime le facteur commun x^3, on trouve

$$\lim_{x=0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\dots\right)=\frac{1}{6}$$

Exercices.

1. Forme $\frac{0}{0}$. — On a, x tendant vers zéro,

$$\lim\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=1 \qquad \lim\frac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}=\frac{1}{18}$$

$$\lim\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=2 \qquad \lim\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\frac{e}{2}$$

$$\lim\frac{x-\operatorname{tg}x}{x^3}=-\frac{1}{3} \qquad \lim\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}=\frac{1}{a}$$

$$\lim\frac{\operatorname{Log}(1+x+x^2)+\operatorname{Log}(1-x+x^2)}{x(e^x-1)}=1$$

2. Forme $\infty-\infty$. — On a, x tendant vers 0,

$$\lim\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\frac{2}{3} \qquad \lim\left(\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\lim\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)=\frac{1}{3} \qquad \lim\left(\frac{\pi x - 1}{2x^2}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

3. Forme $0:\infty$.

$$\lim_{x=\infty} x \operatorname{Log}\frac{x-a}{x+a}=-2a \qquad \lim_{x=+\infty} x^n e^{-ax}=0\begin{pmatrix} n>0 \\ a>0\end{pmatrix}$$

$$\lim_{x=\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}2x \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{2}. \qquad \lim_{x=a} \log\left(2-\frac{x}{a}\right)\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{a}=-\frac{1}{\pi}$$

4. Formes d'indétermination exponentielles :

0^0 $\quad \lim_{x=+0} x^x = 1$ $\qquad$ 1^∞ $\quad \lim_{x=0} (\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx} = e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$

$$\lim_{x=+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\operatorname{tg}x\right)^{\frac{1}{x}}=1 \qquad \lim_{x=\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=\frac{1}{e}$$

∞^0 $\quad \lim_{x=+\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$ $\qquad \lim_{x=0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}.$

$$\lim_{x=+0} (-\operatorname{Log} x)^x = 1 \qquad \lim_{x=0} (\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{a^2}{2}}$$

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}x)^{\sin 2x} = 1 \qquad \lim_{x=+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc}\operatorname{tg}x\right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

5. Discuter l'application de la règle de l'Hospital (deuxième règle) aux exemples suivants, dans lesquels $F'(x)$, dérivée du dénominateur, a une infinité de racines :

$$\lim_{x=\infty}\frac{x^2}{x-\sin x}=\frac{\infty}{\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x=\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{e^{-x}(2-\sin x-\cos x)}=\frac{0}{0}=\begin{cases}+\infty & (0<\alpha<1)\\ 0 & (\alpha>1)\end{cases}$$

$$\lim_{x=\infty}\frac{x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)\,e^{\sin x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{indét.}$$

R. La règle s'applique au premier rapport, au second (seulement si $\alpha > 1$). Elle ne s'applique pas au troisième (elle conduirait cependant à un résultat determiné, 0).

6. Montrer que, si les limites existent au second membre, on a (Cauchy)

$$\lim_{x=+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x=+\infty}[\varphi(x+1)-\varphi(x)]$$

$$\lim_{x=+\infty}\varphi(x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x=+\infty}\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}.$$

§ 3. Maximés et minimés (*) des fonctions d'une seule variable.

136. Définitions. — Si $f(x)$ atteint sa plus grande valeur dans l'intervalle (A, B) en un point a de cet intervalle, $f(a)$ s'appelle LE *maximé* de $f(x)$ dans l'intervalle (A, B). De même, la plus petite valeur, $f(b)$, serait LE *minimé*.

Si la valeur de $f(x)$ est plus grande au point a qu'en tout autre point suffisamment voisin, c'est-à-dire si l'on a, quel que soit le signe de h, sous la seule condition que $| h |$ soit suffisamment petit,

$$f(a + h) - f(a) < 0,$$

$f(a)$ s'appelle UN *maximé* de la fonction, la fonction est *maximée au point* a et a est un *maximant*.

Si $f(x)$ est plus petite au point a qu'en tout autre point suffisamment voisin, c'est-à-dire si l'on a, quel que soit le signe de h et sous la seule condition que $| h |$ soit suffisamment petit,

$$f(a + h) - f(a) > 0,$$

$f(a)$ est UN *minimé* de la fonction, celle-ci est *minimée* au point a et a est un *minimant*.

Géométriquement, si l'on construit la courbe $y = f(x)$, les maximés et minimés correspondront aux points tels que M et M′ de la courbe (fig. 2), où l'ordonnée MP est plus grande et l'ordonnée M′Q plus petite que les ordonnées suffisamment voisines.

Fig. 2.

Il importe de remarquer que, suivant ces définitions, un maximé ou un minimé n'est pas nécessairement la plus grande ou la plus petite valeur de la fonction dans tout l'intervalle où x varie, mais seulement une plus grande ou une plus petite valeur dans un intervalle suffisamment petit, quel que réduit qu'il faille le supposer. Rien n'empêche donc qu'une fonction ait plusieurs maximés ou plusieurs minimés dans un intervalle donné.

(*) On dit aussi *Maxima* et *Minima*. Nous suivons ici la terminologie de l'*Encylopédie des Sciences mathématiques*.

On conjugue les verbes *maximer* et *minimer*. On dit *extrémer* pour l'un et pour l'autre. Une fonction est extrémée si elle est maximée ou minimée. Un maximé ou un minimé est *un extrémé,* etc.

137. Théorème. — *Les seuls points où $f(x)$ puisse être extrémée sont ceux où sa dérivée s'annule ou cesse d'exister.*

C'est une conséquence immédiate des remarques du n° 102. Si $f'(x)$ existe et n'est pas nul, la fonction $f(x)$ est croissante ou décroissante au point x et acquiert au voisinage de ce point des valeurs plus grandes et des valeurs plus petites qu'en ce point : elle ne peut donc y être extrémée.

On remarquera que les points où $f'(x)$ s'annule sont ceux où la tangente à la courbe $y = f(x)$ est parallèle à l'axe des x, comme on l'a représenté dans la figure 2.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de trouver les extrémés d'une fonction $f(x)$ dans un intervalle où sa dérivée première existe. Les seules valeurs de x capables d'extrémer la fonction seront les racines de l'équation $f'(x) = 0$. Soit a l'une d'elles. Nous aurons par la formule des accroissements finis $(0 < \theta < 1)$

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h) = \theta h^2 \frac{f'(a+\theta h) - f'(a)}{\theta h}.$$

Supposons que $f'(a)$ existe et soit différent de 0.

Ce quotient tend vers $f'(a)$. quand h, donc θh, tend vers 0 ; il aura donc le signe de $f''(a)$ pourvu que h | soit suffisamment petit, meme si $f''(a)$ est infini. Donc, θ et h^2 étant positifs, $f(a+h)$ $f(a)$ sera du signe de $f''(a)$. Il y aura :

$$\text{un maximé si } f''(a) < 0, \qquad \text{un minimé si } f''(a) > 0.$$

Plus généralement, supposons que la dérivée d'ordre n existe au point a et soit la première qui ne s'annule pas en ce point. Développons $f(a+h) - f(a)$ par la formule de Taylor jusqu'à l'ordre n. Tous les termes sont nuls sauf le dernier, et il reste seulement

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^n}{n!} \mathrm{M},$$

où, comme on le sait (n° 122), M tend vers $f^{(n)}(a)$ quand h tend

vers 0, et, par suite, a le signe de cette dérivée pour $|h|$ assez petit, même si cette dérivée est infinie. Alors $f(a+h)-f(a)$ a le signe de $h^n f^{(n)}(a)$, signe variable avec celui de h si n est impair (pas d'extrémé), invariable et le même que celui de $f^{(n)}(a)$ si n est pair (minimé ou maximé selon que ce signe est $+$ ou $-$). De là, la règle suivante :

138. Première règle. — *Pour trouver les extrémés d'une fonction continue $f(x)$ dans un intervalle où sa dérivée reste finie, on cherche les racines de cette dérivée. Soit a l'une d'elles. On substitue cette racine dans les dérivées successives de $f(x)$ supposées existantes jusqu'à ce qu'on en trouve une qui ne s'annule pas pour $x = a$. Si cette dérivée est d'ordre impair, il n'y a pas d'extrémé ; si elle est d'ordre pair, il y a maximé si elle est négative, et minimé si elle est positive.*

Il n'est pas toujours nécessaire de calculer les dérivées seconde, troisième, etc... de $f(x)$ pour décider s'il y a maximé ou minimé. D'autre part, la régle précédente ne s'applique pas aux points où la dérivée cesse d'exister. Voici une autre règle, dont l'emploi s'impose pour la discussion des cas où la dérivée est discontinue pour $x = a$.

139. Deuxième règle. — *Soit $f(x)$ une fonction ayant une dérivée déterminée $f'(x)$ dans le voisinage du point a (le point a lui-même pouvant faire exception). Supposons que $f'(x)$ ait, dans le voisinage du point a, un signe unique pour $x < a$, et un signe unique pour $x > a$. Faisons passer x par la valeur a en croissant ; il y aura : 1° minimé au point a si $f'(x)$ passe du négatif au positif ; 2° maximé si $f'(x)$ passe du positif au négatif ; 3° ni maximé ni minimé si $f'(x)$ ne change pas de signe.*

En effet, $f(x)$ est croissant ou décroissant selon le signe de $f'(x)$. Dans le premier cas, $f(x)$ diminue jusqu'à ce que x ait atteint la valeur a pour augmenter ensuite ; dans le second, $f(x)$ augmente, tant que x est $< a$, pour décroître ensuite ; enfin, dans le troisième, $f(x)$ continue à croître ou bien continue à décroitre après que x a passé par la valeur a.

Remarque. — En principe, la première règle est plus simple que la seconde, car elle n'exige que le calcul de valeurs parti-

culières de certaines fonctions, tandis que la seconde demande l'étude de la manière dont varie une fonction, Cependant, en pratique, on rencontre le plus souvent des fonctions bien connues dont le mode de variation est familier. Aussi, dans bien des cas où la première règle est applicable, la seconde est encore plus expéditive.

140. Maximés et minimés correspondant aux points de discontinuité de la dérivée. — Si $f'(x)$ devient discontinue pour $x = a$, la seconde règle indique qu'il peut y avoir extrémé de la fonction. Cela peut se présenter surtout de deux manières différentes : 1° La dérivée $f'(x)$ change de signe en passant par l'infini quand x passe par la valeur de a. Supposons, par exemple, que $f'(x)$ passe du positif au négatif ; la courbe $y = f(x)$ affecte, dans le voisinage de $x = a$, l'allure de la courbe AB dans le voisinage du point M (fig. 3). Le point M s'appelle un *point de rebroussement* et l'on voit sur la figure que l'ordonné MP est un maximé. 2° La dérivée saute brusquement d'une valeur à une autre valeur de signe contraire. Supposons que ce soit d'une valeur négative à une valeur positive ; la courbe $y = f(x)$ affecte alors, dans le voisinage de $x = a$, l'allure de la courbe AB au point M' (fig. 3). En ce point la tangente passe brusquement d'une inclinaison à une autre, de sorte qu'en réalité deux courbes viennent se réunir en M' sous une inclinaison différente. Le point M' est ce qu'on appelle un *point saillant* et l'on reconnaît sur la figure que l'ordonnée M'Q est effectivement minimée.

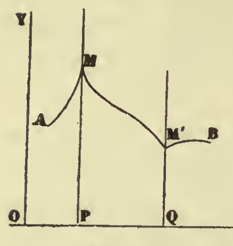


Fig. 3.

Exercices.

1. *Maximés et minimés d'un polynome.* Soit le polynome

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots$$

On trouve ses extrémés en étudiant les changements de signes de sa dérivée (règle II). Soient $a_1, a_2, \ldots$ les racines réelles *de degré impair* de $f'(x)$ *rangées par ordre de grandeur décroissante.* On aura

$$f'(x) = m A_0 x^{m-1} + \cdots = A_0 (x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \ldots \varphi(x) ;$$

les lettres λ désigneront des entiers impairs et $\varphi(x)$ sera nul ou positif.

Supposons $A_0 > 0$; pour $x = +\infty$, $f'(x)$ est égal à $+\infty$, ensuite $f'(x)$ change de signe chaque fois que x passe en décroissant par une des valeurs $a_1, a_2, \ldots$ Donc $f(a_1)$ est un minimé, $f(a_2)$ un maximé, et ainsi de suite alternativement. Si A_0 était négatif, l'ordre serait inverse.

2. *Maximés et minimés d'une fraction rationnelle.* Soit $f(x) = P : Q$. Il faut étudier les changements de signes de la dérivée $(P'Q - PQ') : Q^2$ ou, ce qui revient au même, ceux du polynome $P'Q - PQ'$. On opère donc comme dans l'exercice (1). Les racines réelles d'ordre impair de ce polynome rangées par ordre de grandeur décroissante donneront alternativement : 1° des minimés et des maximés si ce polynome a son premier terme affecté d'un coefficient positif ; 2° des maximés et des minimés si ce coefficient est négatif. Il peut arriver qu'une racine de degré impair de $P'Q - PQ'$ soit en même temps racine de Q. Dans ce cas, c'est une racine de degré pair de Q et elle rend $f(x)$ infinie positive ou infinie négative, mais il n'y a pas d'inconvénient à considérer, par extension, une valeur semblable comme un maximé ou comme un minimé de la fonction.

3. Maximé et minimé de $x^3 - 2x^2 + 1$.

R. La dérivée a deux racines simples : $\frac{4}{3}$(minimant) et 0 (maximant).

4. Maximé et minimé de $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$.

R. L'expression $P'Q - PQ'$ a deux racines simples : 2 (minimant) et 0 (maximant).

5. Maximé de $(a + x)^\alpha (a - x)^\beta$, α et $\beta > 0$.

R. $x = a\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$.

6. Maximé de $\dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$ (R. $x = e$) ; de $x^m e^{-x^2}$ $\left(\text{R. } x = \sqrt{\dfrac{m}{2}}\right)$.

7. Maximés et minimés de $e^x \sin x$.

R. $x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{4}$ (minimant), $x = (2k + 1)\pi - \dfrac{\pi}{4}$ (maximant).

8. Montrer que la fonction $(4 \cos x + \cos 2x)$ est maximée ou minimée en même temps que $\cos x$.

R. On a $f'(x) = -4 \sin x (1 + \cos x)$. Les changements de signes de $f'(x)$ sont les mêmes que ceux de $-\sin x = D \cos x$.

9. Avec trois côtés égaux former un trapèze d'aire maximée.

R. Soit φ l'angle à la base du trapèze. Il faut maximer la fonction $\sin \varphi (1 + \cos \varphi) = 4 \sin \dfrac{\varphi}{2} \cos^3 \dfrac{\varphi}{2}$, d'où $\varphi = 60°$. Le trapèze est formé par trois côtés et la diagonale d'un hexagone inscrit.

10. Trouver sur une droite donnée OX un point P tel que la somme de ses distances à deux points donnés A et B soit minimée.

R. Les deux droites AP et BP doivent être également inclinées sur OX.

11. Etant donné un cône droit, on demande de le couper, parallèlement à la génératrice, par un plan tel que le segment parabolique résultant soit le plus grand possible.

R. Soient a le rayon de la base du cône, x la portion de ce rayon entre la génératrice et le plan sécant. On trouve $x = a : 2$.

12. Dans un levier du second genre, pesant et homogène, quel doit être le bras de levier x de la puissance Q, pour que celle-ci soit minimée, le moment M de la résistance étant donné ?

R. Soit g le poids de l'unité de longueur du levier. On trouve $gx^2 = 2\,M$, $Q = \sqrt{2\,Mg}$.

13. Dans quel système de logarithmes peut-il exister un nombre égal à son logarithme ?

R. Soit a le base du système. Il faut que $x - \log_a x$ puisse s'annuler et, pour cela, que son minimé soit négatif. Ce minimé a lieu pour $x = \text{Log}_a\, e$. La condition que le minimé soit négatif donne

$$a < e^{\frac{1}{e}} < 1{,}444667\ldots$$

§ 4. Décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples.

141. Objet de cette décomposition. — On appelle *fraction simple* une fraction dont le numérateur est une constante, et le dénominateur une simple puissance d'un binome telle que $(z - a)^n$. Nous allons montrer, en nous servant du développement d'une fraction rationnelle par la formule de Taylor, que toute fraction rationnelle peut se décomposer en un polynome entier et une somme de fractions simples. Nous verrons plus tard, dans le calcul intégral, toute l'importance de cette décomposition.

142. Formule de décomposition. — Soit à décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{f(z)}{F(z)}.$$

Si ce n'était pas une fraction proprement dite, en effectuant la division, on la décomposerait en un polynome entier et une fraction proprement dite. Nous admettrons donc que cette opération ait été faite et que $f(z)$ soit de degré moindre que $F(z)$.

Soient $a, b, \ldots l$ les racines réelles ou complexes de $F(z)$; $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ leurs degrés de multiplicité respectifs. On a

$$F(z) = (z - a)^\alpha F_1(z),$$

$F_1(z)$ ayant toutes les mêmes racines que $F(z)$ sauf la racine a. La fraction $f(z) : F_1(z)$, n'étant plus infinie pour $z = a$, peut se développer par la formule de Taylor (nº 127) sous la forme

$$(1) \quad \frac{f(z)}{F_1(z)} = A_0 + A_1(z-a) + \cdots + A_{\alpha-1}(z-a)^{\alpha-1} + M_1(z-a)^\alpha,$$

d'où, en divisant par $(z - a)^\alpha$,

$$(2) \quad \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{A_0}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{z-a} + M_1.$$

Le dernier terme M_1 est, comme on le sait (nº 127), une fraction proprement dite ayant pour dénominateur $F_1(z)$. Les termes précédents sont des fractions simples. On est ainsi ramené à décomposer la fraction

$$M_1 = \frac{f_1(z)}{F_1(z)}.$$

Pour cela, on recommence la même opération. On pose

$$F_1(z) = (z - b)^\beta F_2(z),$$

de sorte que $F_2(z)$ admet les mêmes racines que $F(z)$ sauf les deux racines a et b. En développant $f_1 : F_2$ suivant les puissances de $(z - b)$ et en divisant par $(z - b)^\beta$, il vient

$$M_1 = \frac{f_1(z)}{F_1(z)} = \frac{B_0}{(z-b)^\beta} + \frac{B_1}{(z-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{(z-b)} + M_2$$

et on est amené à décomposer la fraction rationnelle M_2, qui a pour dénominateur $F_2(z)$.

On continue ainsi de suite de manière à épuiser toutes les racines de $F(z)$. Quand on arrive à la dernière, il n'y a plus qu'à décomposer une fraction proprement dite de la forme

$$M = \frac{\varphi(z)}{(z-l)^\lambda},$$

et l'opération s'arrête, car, après avoir développé le polynome $\varphi(z)$ de degré $< \lambda$ suivant les puissances de $z - l$, on trouve

$$M = \frac{L_0}{(z-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(z-l)^{\lambda-1}} + \cdots \frac{L_{\lambda-1}}{(z-l)}.$$

sans nouveau terme complémentaire.

Substituons maintenant, de proche en proche, dans l'équation (1) les développements de M_1, M_2,... M, nous trouverons la formule de décomposition de $f(z) : F(z)$ en fractions simples :

$$\begin{aligned}\frac{f(z)}{F(z)} = \frac{A_0}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{z-a} \\ + \frac{B_0}{(z-b)^\beta} + \frac{B_1}{(z-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{z-b} \\ + \cdots \\ + \frac{L_0}{(z-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(z-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{z-l}.\end{aligned}$$

143. Unicité du développement. Valeurs des coefficients. — Le développement que nous venons d'écrire n'est possible que d'une seule manière, et ses coefficients peuvent se déterminer sous forme de dérivées.

Pour le montrer, définissons la fonction $A(z)$ comme il suit :

$$A(z) = (z-a)^\alpha \frac{f(z)}{F(z)},$$

et multiplions la formule de décomposition par $(z-a)^\alpha$; elle prend la forme

$$A(z) = A_0 + A_1(z-a) + \cdots + A_{\alpha-1}(z-a)^{\alpha-1} + M(z-a)^\alpha,$$

M gardant une valeur finie pour $z = a$. Donc les coefficients sont ceux de la formule de Taylor et nous avons

$$A_0 = A(a), \quad A_1 = \frac{A'(a)}{1\,!}, \quad A_2 = \frac{A''(a)}{2\,!}, \ldots . \; A_{\alpha-1} = \frac{A^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)\,!}.$$

De même, en posant $B(z) = (z-b)^\beta \dfrac{f(z)}{F(z)}$, nous avons

$$B_0 = B(b), \quad B_1 = \frac{B'(b)}{1\,!}, \quad B_2 = \frac{B''(b)}{2\,!}, \ldots . \; B_{\beta-1} = \frac{B^{(\beta-1)}(b)}{(\beta-1)\,!},$$

et ainsi de suite.

Ces formules peuvent servir à la détermination pratique des coefficients. On peut employer aussi d'autres méthodes que nous allons indiquer.

144. Autres méthodes pour calculer les coefficients. — 1° *Méthode des coefficients indéterminés.* On pose *a priori* la formule de décomposition, dont la forme est connue, en laissant les numé-

rateurs indéterminés. On chasse ensuite les dénominateurs en multipliant les deux membres par $F(z)$. En égalant les coefficients des mêmes puissances de z, on forme un système d'équations linéaires qui détermine les coefficients inconnus.

2° *Méthode de dérivations successives.* Soit, par exemple, à déterminer les coefficients A. Si l'on multiplie l'équation (1) du n° 142 par $F_1(z)$, qui est égal à $F(z) : (z-a)^\alpha$, il vient

$$f(z)-F_1(z)\left[A_0+A_1(z-a)+\cdots+A_{\alpha-1}(z-a)^{\alpha-1}\right]=(z-a)^\alpha M_1F_1(z),$$

d'où l'on conclut que le polynome du premier membre admet la racine a au degré α. Donc il s'annule pour $z=a$ ainsi que ses $(\alpha-1)$ premières dérivées. En le dérivant $(\alpha-1)$ fois et en exprimant que ces conditions sont satisfaites, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
&f(a)-F_1(a)A_0=0,\\
&f'(a)-F_1'(a)A_0-F_1(a)A_1=0,\\
&f''(a)-F_1''(a)A_0-2F_1'(a)A_1-2F_1(a)A_2=0,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. C'est un système d'équations récurrentes qui déterminent de proche en proche $A_0, A_1, A_2, \ldots$

3° On peut arriver autrement au même système d'équations. On remplace z par $a+h$ dans le polynome que l'on vient de dériver successivement, ce qui donne

$$f(a+h)-F_1(a+h)\left[A_0+A_1h+\cdots+A_{\alpha-1}h^{\alpha-1}\right];$$

puis on ordonne suivant les puissances de h jusque $h^{\alpha-1}$. En exprimant alors que les coefficients de toutes ces puissances sont nuls, on retrouve le système d'équations qui précède. Ce sont ces derniers calculs qui seront ordinairement les plus rapides. Ils reviennent à effectuer la division de $f(a+h)$ par $F_1(a+h)$ en ordonnant suivant les puissances croissantes de h.

145. Cas des racines simples. Formule de Lagrange. — Lorsque toutes les racines de $F(z)$ sont simples, le développement en fractions simples se réduit à

$$\frac{f(z)}{F(z)}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-b}+\cdots+\frac{L}{z-l}.$$

Les coefficients A, B..., se déterminent alors par les formules

$$A = \lim_{z=a} \frac{(z-a)f(z)}{F(z)} = \frac{f(a)}{F'(a)}, \quad B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \ldots$$

que l'on trouve par la règle de l'Hospital dans le cas où elle s'applique aux variables complexes. La formule de décomposition est donc la suivante :

$$\frac{f(z)}{F(z)} = \frac{f(a)}{F'(a)} \frac{1}{z-a} + \frac{f(b)}{F'(b)} \frac{1}{z-b} + \cdots$$

La formule de Lagrange n'est qu'une transformation de la précédente. On fait les substitutions :

$$\begin{aligned} F(z) &= (z-a)(z-b)\cdots(z-l), \\ F'(a) &= (a-b)(a-c)\cdots(a-l), \\ F'(b) &= (b-a)(b-c)\cdots(b-l), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et l'on multiplie par $F(z)$; il vient

$$f(z) = f(a)\frac{(z-b)(z-c)\cdots(z-l)}{(a-b)(a-c)\cdots(a-l)} + f(b)\frac{(z-a)(z-c)\cdots(z-l)}{(b-a)(b-c)\cdots(b-l)} + \cdots$$

Cette formule s'appelle la *formule d'interpolation de Lagrange*. On s'en sert pour construire la fonction $f(z)$, entière, de degré $< n$, qui prend n valeurs données $f(a)$, $f(b)$,... pour n valeurs données a, b,... l de z.

CHAPITRE III.

Fonctions explicites de plusieurs variables.

---

§ 1. Dérivées partielles et différentielles partielles ou totales des fonctions de deux variables.

146. Dérivées et différentielles partielles. — Soit $u = f(x, y)$ une fonction continue et univoque de deux variables indépendantes x et y. Si l'on attribue à y une valeur constante et qu'on fasse varier x, u devient une fonction continue de x seul. Si elle admet une dérivée, celle-ci se nomme la *dérivée partielle de u par rapport à x*. Cette dérivée partielle est ainsi, par définition, la limite du rapport

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

quand la différence Δx tend vers 0. On la représente par l'une ou l'autre des notations suivantes :

$$f'_x(x, y), \quad D_x f(x, y) \quad \text{ou} \quad D_x u, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial u}{\partial x}.$$

De même, en regardant x comme constant et y comme variable, on forme le rapport

$$\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Si celui-ci tend vers une limite quand Δy tend vers zéro, cette limite est la *dérivée partielle de u par rapport à y* et se représente par les symboles, analogues aux précédents :

$$f'_y(x, y), \quad D_y f(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Les *différentielles partielles* $d_x u$, $d_y u$ sont, par définition, les produits :

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x, \qquad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y,$$

des dérivées partielles en x et en y par les différences arbitraires Δx et Δy des variables correspondantes.

147. Différentielle totale. — Rappelons d'abord les définitions qui ont été données pour une fonction u d'une seule variable x. Cette fonction est *différentiable* si son accroissement Δu peut se mettre sous la forme

$$\Delta u = \mathrm{A}\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x,$$

où A est independant de Δx et ε infiniment petit avec Δx, auquel cas sa *différentielle, du,* est la partie, $\mathrm{A}\,\Delta x$, de Δu qui est simplement proportionnelle à Δx.

Ces définitions s'étendent tout naturellement aux fonctions de plusieurs variables.

Considérons une fonction u de deux variables qui reçoivent respectivement les accroissemenls Δx et Δy, et posons, pour abréger l'écriture,

$$\rho = |\,\Delta x\,| + |\,\Delta y\,|\,.$$

Nous dirons que u est *différentiable au point x, y si u est bien déterminée aux environs de ce point et si son accroissement Δu peut se décomposer en deux parties comme il suit :*

$$\Delta u = (\mathrm{A}\,\Delta x + \mathrm{B}\,\Delta y) + \varepsilon\rho, \tag{1}$$

A, B *étant indépendants de Δx et Δy, et ε infiniment petit avec ρ.*

Il est clair d'ailleurs qu'il est indifférent d'écrire $\varepsilon\rho$ ou

$$\varepsilon'\Delta x + \varepsilon''\Delta y,$$

pourvu que ε' et ε'' tendent vers 0 quand Δx et Δy tendent vers 0 d'une manière quelconque.

Quand u est différentiable, la partie de Δu qui est simplement linéaire en Δx et Δy s'appelle la *différentielle totale* de u et se représente par du. On a donc

$$du = \mathrm{A}\,\Delta x + \mathrm{B}\,\Delta y.$$

THÉORÈME. — *La différentielle totale d'une fonction différentiable de deux variables est la somme de ses deux différentielles partielles.*

En effet, posant $\Delta y = 0$ dans (1), puis faisant tendre Δx vers 0, on en conclut

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \text{A} ; \qquad \text{de même,} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \text{B}.$$

Par conséquent,

$$(2) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y = d_x u + d_y u.$$

Ceci montre que *les dérivées partielles de u sont finies et déterminées en tout point où u est différentiable,* mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Si l'on fait $u = x$, ou $u = y$, dans (2), il vient

$$dx = \Delta x, \qquad dy = \Delta y,$$

et, en substituant ces valeurs dans (2), il vient

$$(3) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

La comparaison des équations (2) et (3) appelle une remarque analogue à celle qui a été faite dans le cas des fonctions d'une seule variable (n° 93). L'équation (3) est, comme nous le verrons, plus générale que (2). Celle-ci suppose les variables x et y indépendantes, tandis que l'équation (3) n'est pas soumise à cette restriction.

Il est essentiel de remarquer que, la fonction u étant différentiable au point (x, y), l'expression (1) de l'accroissement Δu prend maintenant la forme

$$(4) \qquad \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon\rho = du + \varepsilon\rho.$$

Les équations (1) ou (4) mettent d'ailleurs en évidence que Δu tend vers 0 avec ρ (donc avec Δx et Δy) ; d'où la proposition importante : *Une fonction est continue en tout point où elle est différentiable.*

148. Théorème. — *Une fonction ne peut cesser d'être différentiable que si ses dérivées partielles cessent d'être continues.*

Sous une forme plus précise :

La fonction $u = f(x, y)$ sera différentiable au point M(x, y), *si f'_y est finie et déterminée au point* M, *f'_x déterminée dans les environs du point et, de plus, continue au point* M *(ou vice-versa).*

Décomposons la différence Δf en une somme de deux autres différences :

$$[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

Désignons par ε', ε'' des quantités qui tendent vers 0 avec les Δ. Nous avons d'abord

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon'\Delta y,$$

parce que $f'_y(x, y)$ existe et est finie ; ensuite, par la formule des accroissements finis,

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) &= \Delta x f'_x(x + \theta\Delta x, y + \Delta y) \\ &= f'_x(x, y)\Delta x + \varepsilon''\Delta x, \end{aligned}$$

parce que f'_x est déterminée aux environs de M et continue en ce point. Substituant cela dans l'expression de Δf, elle devient

$$\Delta f = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y + \varepsilon''\Delta x + \varepsilon'\Delta y.$$

Comme $\varepsilon''\Delta x + \varepsilon'\Delta y$ est de la forme $\varepsilon\rho$, car $|\Delta x|$ et $|\Delta y|$ sont $\leqslant \rho$, cette relation est de la forme (1), ce qui prouve la proposition.

149. Remarque. — Les conditions énoncées dans le théorème précédent et, en particulier, l'existence des dérivées aux environs du point M, ne sont nullement nécessaires pour que la fonction soit *différentiable* en ce point. On peut d'ailleurs donner une expression assez simple de la condition nécessaire et suffisante pour cela. A cet effet, désignons, en général, par $\Delta_x\varphi$ et $\Delta_y\varphi$ les accroissements d'une fonction $\varphi(x, y)$ provenant respectivement des accroissements Δx seul et Δy seul. Si l'on donne successivement ces accroissements à x puis à y, $f(x, y)$ devient successivement

$$(1 + \Delta_x)f, \quad \text{puis} \quad (1 + \Delta_y)(1 + \Delta_x)f = (1 + \Delta)f.$$

D'où la relation

$$\Delta f = \Delta_x f + \Delta_y f + \Delta_x\Delta_y f.$$

Mais, si f est différentiable, les dérivées partielles sont existantes et finies, on a donc

$$\Delta_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon'\right)\Delta x, \qquad \Delta_y f = \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon''\right)\Delta y.$$

Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x, y)$ soit différentiable en un point (x, y) où ses deux dérivées partielles sont finies et déterminées, est que la différence seconde $\Delta_x \Delta_y f$ soit infiniment petite par rapport à ρ.*

150. Dérivée et différentielle d'une fonction composée d'une seule variable indépendante. — Soit $u = f(x, y)$ une fonction *différentiable* au point x, y. Remplaçons-y x et y par deux fonctions d'une variable indépendante unique t, *différentiables* au point t. Nous obtenons ainsi une *fonction composée* de t. Pour calculer sa dérivée au point t, remarquons que la formule (4) subsiste indépendamment de toute hypothèse sur les accroissements Δx et Δy, de sorte que nous pouvons admettre qu'ils correspondent à l'accroissement Δt. Divisons alors la formule (4) par Δt, il vient (en écrivant f au lieu de u)

$$\frac{\Delta f(x, y)}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon\frac{\rho}{\Delta t}.$$

Faisons tendre Δt et avec lui Δx, Δy, ε et ρ vers 0 ; il vient, à la limite, vu nos hypothèses au point t, en vertu desquelles $\Delta x : \Delta t$, $\Delta y : \Delta t$ et $\rho : \Delta t$ ont des limites finies,

$$\frac{df(x, y)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Donc, *si $f(x, y)$ est différentiable, et si x, y sont des fonctions différentiables de t, la dérivée de f par rapport à t est la somme des dérivées partielles de f par rapport à x et y respectivement multipliées par les dérivées de x et y par rapport à t.* C'est la règle de dérivation des fonctions composées.

En multipliant cette formule par dt, on obtient la différentielle de $f(x, y)$, à savoir

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

D'où le théorème suivant :

Si $f(x, y)$ est différentiable et si x et y sont deux fonctions différentiables d'une même variable t, la différentielle de $f(x, y)$ considérée comme fonctions de t, s'exprime au moyen de x, y, dx et dy, par la différentielle totale de $f(x, y)$ comme si les variables x et y étaient indépendantes.

Remarque. — Le théorème général que nous venons d'énoncer renferme, comme cas particuliers, les règles de dérivation d'une somme, d'un produit et d'un quotient que nous avons démontrées séparément au chapitre Ier (n° 95). On vérifie, en effet, immédiatement que les seconds membres des formules :

$$d(u+v) = du + dv, \qquad d\,uv = u\,dv + v\,du,$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

représentent respectivement la somme des différentielles partielles des premiers membres par rapport à u et à v.

151. Calcul pratique des différentielles totales. — Le théorème précédent revient à dire que les différentielles totales se calculent par les mêmes règles que les différentielles des fonctions composées d'une seule variable. Si les différents modes de composition de la fonction $f(x, y)$ sont de ceux qui ont été prévus au chapitre I, et c'est ordinairement le cas, il suffira d'appliquer les règles établies dans ce chapitre pour obtenir la différentielle totale.

C'est ainsi que les règles de différentiation d'une fonction de fonction, d'un quotient et d'une somme (n° 95) conduisent aux résultats suivants :

$$d \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \frac{d\frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2};$$

$$d \operatorname{Log} \sqrt{x^2 + y^3} = \frac{d\sqrt{x^2+y^3}}{\sqrt{x^2+y^3}} = \frac{2\,x\,dx + 3\,y^2 dy}{2\,(x^2+y^3)}.$$

On voit que les différentielles totales s'obtiennent sans calculer séparément les dérivées partielles et l'on évite ainsi la répétition inutile de certains calculs.

D'autre part, si l'on connaît la différentielle totale de $f(x, y)$, on peut en déduire à simple lecture ses deux dérivées partielles. En effet, dx et dy étant des coefficients indéterminés, la dérivée partielle par rapport à x sera le coefficient de dx, et la dérivée partielle par rapport à y celui de dy, dans l'expression de la différentielle totale. C'est ainsi que l'on tire immédiatement du calcul fait plus haut :

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

152. Dérivées partielles du second ordre. — Soit $u = f(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x et y ; ses dérivées partielles f'_x et f'_y seront, en général, des fonctions de x et de y et pourront admettre elles-mêmes des dérivées partielles. Nous désignerons la dérivée partielle de f'_x par rapport à x par

$$f''_{xx}(x, y) \quad \text{ou} \quad D^2_{xx}f \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

et sa dérivée partielle par rapport à y par

$$f''_{xy}(x, y) \quad \text{ou} \quad D^2_{xy}f \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

De même, les dérivées partielles de f'_y par rapport à x et à y seront respectivement

$$f''_{yx} = D^2_{yx}f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad f''_{yy} = D^2_{yy}f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Voici, concernant ces dérivées, un théorème fondamental, en vertu duquel $f''_{yx} = f''_{xy}$, ce qui réduit à trois seulement le nombre des dérivées partielles du second ordre.

153. Interversion des dérivations. — Théorème I (Young). — *Si f'_x et f'_y sont déterminés aux environs du point x, y et différentiables en ce point, on a, au point x, y,*

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

On obtient ce théorème en calculant de deux manières différentes la différence seconde :

$$\Delta^2 f = f(x + h, y + h) - f(x + h, y) - f(x, y + h) + f(x, y).$$

D'abord $\Delta^2 f$ est l'accroissement éprouvé par

$$\varphi(x) = f(x, y + h) - f(x, y)$$

quand x augmente de h, d'où, en appliquant à $\varphi(x)$ la formule des accroissements finis,

$$\Delta^2 f = h[f'_x(x + \theta h, y + h) - f'_x(x + \theta h, y)].$$

Mais, comme f'_x est différentiable au point x, y, on a, par la formule (4) du n° 147, ε' et ε'' tendant vers 0 avec h,

$$f'_x(x + \theta h, y + h) - f'_x(x, y) = \theta h f''_{xx} + h f''_{xy} + \varepsilon' h,$$
$$f'_x(x + \theta h, y) - f'_x(x, y) = \theta h f''_{xx} + \varepsilon'' h.$$

Portant la différence de ces deux quantités dans le crochet, on trouve

$$\Delta^2 f = h^2 f''_{xy} + \varepsilon h^2,$$

où ε désigne encore une quantité, $\varepsilon' - \varepsilon''$, qui tend vers 0 avec h.

D'autre part, $\Delta^2 f$ est l'accroissement de la fonction

$$\psi(y) = f(x+h, y) - f(x, y)$$

quand y augmente de h, en sorte que l'on trouve, par un calcul symétrique du précédent,

$$\Delta^2 f = h^2 f''_{yx} + \varepsilon' h^2.$$

Faisant tendre h vers 0, il vient donc

$$\lim \frac{\Delta^2 f}{h^2} = f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Le théorème de Young postule l'existence de toutes les dérivées secondes au point x, y, mais non leur continuité. Le théorème suivant de Schwarz ne postule l'existence que de f''_{xy} (mais aussi sa continuité) et il peut être plus utile dans certains cas :

Théorème II (Schwarz). — *Si f'_x, f'_y et f''_{xy} existent dans le voisinage du point (x, y), et si f''_{xy} est continue au point (x, y), l'autre dérivée f''_{yx} existe aussi en ce point et est identique à f''_{xy}.*

Posons, pour simplifier,

$$\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x, y) ;$$

on aura, par la formule des accroissements finis, qui s'applique deux fois de suite,

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) - \varphi(x) &= h\,[f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y)] \\ &= hk f''_{xy}(x+\theta h, y+\theta_1 k).\end{aligned}$$

Cette dérivée seconde est continue ; donc, en désignant par ε une quantité qui tend vers 0 avec h et k, on peut écrire

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = hk[f''_{xy}(x, y) + \varepsilon].$$

Divisons d'abord par k et faisons tendre k vers 0 ; les deux rapports $\varphi : k$ au premier membre ont pour limites des dérivées f'_y supposées existantes et l'on trouve

$$f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y) = h[f''_{xy}(x, y) + \varepsilon].$$

Divisons maintenant par h et faisons tendre h vers 0 ; ε tend vers 0, et il vient, par définition de la dérivée seconde, $f''_{yx} = f''_{xy}$.

Donc, *si les dérivées considérées sont continues, les caractéristiques* D_x *et* D_y *peuvent toujours être interverties.*

Les quatre dérivées partielles du second ordre de la fonction $u = f(x, y)$ se réduisent donc en général à trois distinctes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ ou } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Cette notation a l'avantage de mettre l'égalité des deux dérivées partielles en évidence et, quand on l'emploie, on suppose toujours implicitement que les conditions nécessaires pour assurer cette égalité sont remplies :

154. Différentielles partielles du second ordre. — Aux dérivées partielles du second ordre correspondent les différentielles partielles, définies par les équations :

$$d_x^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2, \qquad d_x d_y u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy, \qquad d_y^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2.$$

L'équation $D_x D_y u = D_y D_x u$ entraîne donc aussi l'égalité

$$d_x d_y u = d_y d_x u,$$

de telle sorte que l'ordre de deux différentiations partielles successives par rapport à x et à y peut aussi être interverti.

155. Dérivées et différentielles partielles d'ordre quelconque. — Le théorème du n° 153 se généralise de lui-même. Concevons que l'on effectue sur une fonction $u = f(x, y)$ un nombre quelconque de dérivations partielles successives, les unes par rapport à x, les autres par rapport à y, dans un ordre arbitraire. Il suit de ce théorème que l'ordre de deux opérations consécutives peut être interverti quand elles se rapportent à deux variables différentes, pourvu que toutes les dérivées que l'on considère restent continues ou, plus généralement, que l'on ne dérive que des fonctions différentiables. Moyennant cette restriction, on peut, par la répétition de ces permutations, ranger les dérivations dans l'ordre que l'on veut ; on peut faire, par exemple, d'abord toutes les dérivations par rapport à x et ensuite toutes celles

par rapport à y. Le résultat de m dérivations par rapport à x et de n dérivations par rapport à y, opérées consécutivement sur la fonction u, est indépendant de l'ordre suivi et peut se désigner par un seul et même symbole

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}.$$

Cette quantité est une *dérivée partielle* de l'ordre $(m+n)$. En la multipliant par $dx^m dy^n$, on obtient la différentielle partielle du même ordre

$$d_x^m d_y^n u = \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} dx^m dy^n.$$

156. Différentielles totales successives. — Soit $u = f(x, y)$ une fonction *différentiable* des deux variables indépendantes x et y. Si sa différentielle totale

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

est *différentiable*, dx et dy étant considérés comme des paramètres constants, c'est-à-dire si $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont déterminés aux environs du point considéré et différentiables en ce point, on dira que u est différentiable jusqu'au second ordre et la différentielle de du sera sa différentielle seconde d^2u.

Cette différentielle se calcule de la même façon que la précédente. Mais on observe que l'on a, en vertu du théorème de Young (n° 153) qui s'applique quand du est différentiabl ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

De plus, on convient d'introduire les mêmes différentielles dx et dy dans les deux différentiations consécutives. On trouve ainsi

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2.$$

Les différentielles successives d^3u, d^4u,... se définissent ainsi de proche en proche. On dit que u est *différentiable jusqu'à l'ordre n* si $d^{n-1}u$ est différentiable, donc si toutes les dérivées d'ordre $(n-1)$ sont déterminées autour du point considéré et différentiables en ce point. Cette condition assure la

légitimité de l'interversion des dérivations en x et en y et le calcul se fait sans difficulté.

On peut former une expression symbolique très commode de $d^n u$ en remarquant que, pour former la différentielle totale d'une fonction, il suffit de la multiplier par le facteur symbolique

$$\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$$

et d'effectuer la multiplication comme si $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$, dx et dy étaient des facteurs algébriques. On trouve ainsi, en interprétant les puissances de ∂ comme des indices de dérivation,

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n u.$$

Ceci suppose que x et y soient des variables indépendantes ou, plus généralement, que dx et dy puissent être traitées comme des constantes dans les différentiations successives.

Si x et y sont des fonctions différentiables d'autres variables indépendantes, dx et dy ont des différentielles successives d^2x, d^3x,... d^2y, d^3y,... qui s'introduisent dans les différentielles de u. Dans ce cas, on trouve, en faisant les calculs,

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y,$$

et ainsi de suite.

157. Méthode pratique de calcul. — Pratiquement, les différentielles totales se calculent, non par l'addition des différentielles partielles, mais par la simple application des règles générales du chapitre I. Le calcul est même si simple qu'il y a souvent avantage à se servir de ces différentielles pour calculer les dérivées partielles de u. On traite alors x et y comme des variables indépendantes dont les différentielles dx et dy sont des constantes arbitraires, On obtient ainsi des résultats de la forme

$$du = pdx + qdy, \qquad d^2u = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2, \ldots$$

où p, q, r, s, t sont des fonctions explicites de x et y. La comparaison avec les formules générales montre que l'on a, puisque dx et dy sont des indéterminées,

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ldots.$$

Cette méthode de calcul est surtout avantageuse lorsque l'on doit connaître toutes les dérivées partielles d'un même ordre. C'est généralement le cas dans les applications géométriques.

§ 2. Extension à un nombre quelconque de variables.

158. Définitions des dérivées et des différentielles premières. — Soit $u = f(x, y, z....)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes ; la *dérivée partielle* de u par rapport à l'une d'elles, x par exemple, est la dérivée de u considérée comme fonction de x seule, toutes les autres variables étant traitées comme des constantes. On la représente par les symboles :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f'_x(x, y, z,...), \qquad D_x f(x, y, z,...).$$

Les différentielles partielles $d_x u$, $d_y u$,... s'obtiennent en multipliant les dérivées partielles par les accroissements Δx, Δy,... des variables correspondantes, de sorte que

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x, \qquad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y,...$$

La fonction u est *différentiable au point* x, y,... si elle est déterminée aux environs de ce point et si l'accroissement Δu correspondant aux accroissements Δx, Δy,... peut se décomposer dans la somme de deux parties :

$$\Delta u = (A\Delta x + B\Delta y + \cdots) + \varepsilon\rho,$$
$$\rho = | \Delta x | + | \Delta y | + \cdots$$

dont la première est simplement linéaire en Δx, Δy,... et où ε tend vers 0 avec Δx, Δy,... c'est-à-dire avec ρ (*). Dans ce cas, la première partie $(A\Delta x, + B\Delta y + ...)$ se représente par du et s'appelle la *différentielle totale* de u. Comme d'ailleurs A, B,... sont les dérivées partielles de u en x, en y,..., il vient

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \cdots$$

Donc la *différentielle totale est la somme des différentielles partielles.*

(*) La définition ne serait donc pas changée si l'on posait

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + ...}$$

En particulier, pour $u = x$, pour $u = y, \ldots$ on a respectivement

$$dx = \Delta x, \qquad dy = \Delta y, \ldots$$

et du peut s'écrire sous une nouvelle forme

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \cdots$$

Cette nouvelle forme a sur la première l'avantage d'une plus grande généralité comme nous le montrerons tout à l'heure (n° 159).

Si u est *différentiable* au point x, y, nous pouvons écrire maintenant

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \cdots + \varepsilon \rho,$$

ε tendant vers zéro en même temps que les accroissements Δ. Il suit de là qu'*une fonction est continue en tout point où elle est différentiable.*

La démonstration du n° 148 se généralise d'elle-même, de sorte qu'*une fonction ne peut cesser d'être différentiable que si ses dérivées partielles cessent d'être continues.*

159. Différentiation des fonctions de fonctions. — Soit u une fonction *différentiable* des variables $x, y, \ldots$, celles-ci étant elles-mêmes des fonctions *différentiables* des variables indépendantes $\xi, \eta, \ldots$, de sorte que u est une fonction composée de $\xi, \eta, \ldots$ Je dis que *u, considérée comme fonction de $\xi, \eta, \ldots$, est différentiable et que sa différentielle totale s'exprime à l'aide de $x, y, \ldots dx, dy, \ldots$ par la même formule*

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \cdots$$

que si les variables $x, y, \ldots$ étaient indépendantes.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons dans la démonstration qu'il n'y ait que deux fonctions intermédiaires x, y et deux variables indépendantes ξ, η. Posons

$$\rho = |\Delta x| + |\Delta y|, \qquad \rho' = |\Delta \xi| + |\Delta \eta|.$$

Nous aurons, puisque x, y sont différentiables,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta \eta + \varepsilon' \rho', \\ \Delta y &= \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta \eta + \varepsilon'' \rho', \end{aligned} \right.$$

où les quantités ε tendent vers 0 avec ρ'. Soit ω la valeur absolue de la plus grande de ces quantités ε, et M la valeur absolue de la plus grande en valeur absolue des quatres dérivées partielles de x et y. Nous aurons, par les équations (1),

$$|\Delta x| < (M+\omega)\rho', \qquad |\Delta y| < (M+\omega)\rho'$$

et, par conséquent,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{\rho'} < 2(M+\omega).$$

Donc le rapport $\rho : \rho'$ reste fini et ρ tend vers 0 avec ρ'.

Ceci posé, la fonction $f(x, y)$ étant différentiable, nous avons

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\rho\ ;$$

et, en substituant dans ceci les valeurs (1), qui peuvent s'écrire

$$\Delta x = dx + \varepsilon'\rho', \qquad \Delta y = dy + \varepsilon''\rho',$$

il vient

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \rho'\left(\varepsilon\frac{\rho}{\rho'} + \varepsilon' + \varepsilon''\right).$$

Mais ceci prouve la proposition, car la dernière parenthèse est infiniment petite avec ρ' et la précédente est, en même temps que dx et dy, linéaire et homogène en $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$. On a donc

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Donc, tant que les fonctions considérées sont différentiables, les différentielles totales se calculent toujours de la même façon, que les variables soient indépendantes ou ne le soient pas.

160. Dérivation des fonctions composées. — Si x, y,... sont des fonctions différentiables d'une variable unique t, la dérivée de $u = f(x, y,...)$ par rapport à t s'obtient en divisant la différentielle du par dt. Il vient ainsi

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \cdots$$

ce qui généralise la règle du nº 150.

Si x, y,... sont des fonctions différentiables de plusieurs variables ξ, η,..., les dérivées partielles de $f(x, y,...)$ par rapport à ces variables se calculent par la formule précédente,

sauf que les dérivées de x, y,... sont des dérivées partielles. Par exemple, on a

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\cdots$$

161. Différentiation des équations. — Soient x, y,... des variables indépendantes. Si une fonction $u = f(x, y,...)$ se réduit à une constante, on a

$$\Delta u = 0, \qquad \text{donc (par définition)} \qquad du = 0.$$

Réciproquement, si

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \cdots = 0,$$

comme dx, dy,.,. sont arbitraires, chacune des dérivées partielles doit être nulle, u ne dépend d'aucune des variables et se réduit à une constante. Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que u se réduise à une constante est que l'on ait $du = 0$.*

Considérons maintenant des variables x, y,... indépendantes ou non, satisfaisant à l'équation

$$f(x, y,...) = 0.$$

Nous disons que cette équation est *différentiable* si la fonction $f(x, y,...)$ est différentiable. Donc, si x, y,... sont différentiables, df se calculant toujours de la même façon, on aura, puisque f est constant et df nul,

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \cdots = 0.$$

Différentier totalement une équation, c'est égaler les différentielles totales de ses deux membres. Le résultat que nous venons d'obtenir se formule dans le principe suivant, qui est fondamental :

Étant donnée une équation différentiable entre un certain nombre de variables, indépendantes ou non, mais différentiables, il est toujours permis de différentier totalement l'équation.

162. Dérivées et différentielles successives. — Les considérations émises dans le paragraphe précédent se généralisent d'elles-mêmes et il suffit d'énoncer les résultats.

Si l'on effectue un nombre quelconque de dérivations succes-

sives par rapport à des variables différentes $x, y, z, \ldots$, l'ordre de deux dérivations successives par rapport à deux variables différentes peut toujours être interverti, moyennant l'hypothèse de la continuité des dérivées ou celle de la différentiabilité des fonctions. De la sorte, le résultat de m dérivations par rapport à x, n dérivations par rapport à y, p dérivations par rapport à $z, \ldots$ effectuées dans un ordre quelconque sur une fonction $u = f(x, y, z, \ldots)$, peut être représenté par le symbole unique

$$\frac{\partial^{m+n+p+\cdots} u}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p \ldots}.$$

Une différentielle sera dite *différentiable* si elle est formée de dérivées partielles différentiables. Dans ce cas, les différentielles totales successives se calculent en appliquant successivement les règles établies pour les différentielles premières. Si les variables $x, y, z, \ldots$, sont indépendantes, la différentielle $n^{\text{ième}}$ de $f(x, y, z, \ldots)$ admet la forme symbolique

$$d^n f(x, y, z, \ldots) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz + \cdots\right)^n f.$$

163. Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. — Une fonction $f(x, y, z, \ldots)$ est *homogène* par rapport aux variables $x, y, z, \ldots$, lorsqu'elle vérifie l'identité

$$(1) \qquad f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots),$$

t désignant une indéterminée. L'exposant m est le *degré d'homogénéité* de la fonction.

Si l'on fait $t = \frac{1}{x}$, l'identité devient

$$f(x, y, z, \ldots) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \cdots\right),$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad f(x, y, z, \ldots) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \cdots\right).$$

Donc, si l'on divise une fonction homogène de degré m par la $m^{\text{ième}}$ puissance de l'une des variables, elle ne dépend plus que des seuls rapports des variables.

On s'assure immédiatement qu'une fonction qui vérifie la condition (2) vérifie la condition (1). Donc l'équation (2) peut aussi servir de définition des fonctions homogènes.

Dérivons l'équation (1) par rapport à t, il vient identiquement

$$xf'_x(tx, ty,...) + yf'_y(tx, ty,...) + \cdots = mt^{m-1}f(x, y,...)$$

ou, en faisant $t = 1$,

$$(3) \qquad xf'_x(x, y,...) + yf'_y(x, y,...) + \cdots = mf(x, y,...).$$

C'est dans cette identité que consiste le théorème d'Euler : *La somme des produits des dérivées partielles d'une fonction homogène par les variables correspondantes est égale à la fonction elle-même multipliée par le degré d'homogénéité.*

Plus généralement, si l'on dérivait l'équation (1) n fois de suite par rapport à t avant de faire $t = 1$, on trouverait, par la formule symbolique du numéro précédent,

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \cdots\right)^n f(x, y,...) = m(m-1)...(m-n+1)f(x, y,...).$$

EXERCICES.

1. Dérivées partielles et différentielles totales successives des fonctions :

$$(x^3 - 2y)^2 + \sqrt{xy}, \quad \frac{x^2y}{a^2 - z^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{x^2y^2}{z^2 + t^2}.$$

2. Dérivées partielles d'ordre quelconque de $f(ax + by + c)$.

R. $$\frac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m \partial y^n} = a^m b^n f^{(m+n)}(ax + by + c).$$

3. Appliquer le calcul de l'exercice précédent en supposant que $f(u)$ soit une des fonctions :

$$e^u, \quad \sin u, \quad \cos u, \quad \text{Log}\, u, \quad \text{etc...}$$

4. Différentielle $n^{\text{ième}}$ de $u = e^{ax} f(y)$.

R. On applique la formule symbolique du nº 156. On trouve, en interprétant les puissances de f comme des indices de dérivation,

$$d^n e^{ax} f(y) = e^{ax} [f(y)\, dy + a\, dx]^n.$$

5. Appliquer ce résultat à la fonction $e^{ax} \cos by$.

6. Différentielle totale $n^{\text{ième}}$ de $u = \text{arc tg}\frac{y}{x}$.

R. Différentions une première fois, il viendra

$$du = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2i}\left[\frac{dx + idy}{x + yi} - \frac{dx - idy}{x - yi}\right]$$

puis, en différentiant encore $(n-1)$ fois,

$$d^n u = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2i}\left[\frac{(dx+idy)^n}{(x+yi)^n} - \frac{(dx-idy)^n}{(x-yi)^n}\right].$$

Pour se débarrasser des imaginaires, on pose

$$x+yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad dx + i\,dy = ds(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

On a alors

$$d^n u = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{ds}{r}\right)^n \sin n(\varphi-\theta).$$

On peut aussi calculer d'une manière analogue les dérivées partielles.

7. Différentielle totale $n^{\text{ième}}$ de $u = \text{Log}\sqrt{x^2+y^2}$.

R. On trouve d'abord

$$du = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{dx+i\,dy}{x+yi} + \frac{dx - i\,dy}{x-yi}\right],$$

ensuite, par les substitutions de l'exercice précédent,

$$d^u u = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{ds}{r}\right)^n \cos n(\varphi-\theta).$$

Remarque. Les résultats des exercices 6 et 7 dérivent immédiatement du calcul de d^n Log z dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

8. *Si* $f'_x(x+h.\ y,\ z,\ldots)$ *tend vers une limite déterminée quand* h *tend vers* 0, *on a*

$$f'_x(x,y,z,\ldots) = \lim f'_x(x+h,y,z\ldots).$$

R. Ce théorème se démontre en faisant tendre h vers 0 dans la relation

$$\frac{f(x+h,y,z,\ldots) - f(x,y,z,\ldots)}{h} = f'_x(x+\theta h, y, z,\ldots).$$

C'est donc une propriété de la dérivée des fonctions d'une seule variable.

9. *Si le point* $x,\ y,\ldots$ *est un point de discontinuité isolé de la dérivée seconde* $f''_{xy}(x,\ y,\ldots)$, *c'est-à-dire s'il n'y a pas d'autre point de discontinuité dans un domaine suffisamment petit enveloppant ce point, on aura, pourvu que ces limites existent,*

$$f''_{xy}(x,y,\ldots) = \lim_{k=0} f''_{xy}(x,y+k,\ldots) = \lim_{k=0} f''_{yx}(x,y+k,\ldots),$$
$$f''_{yx}(x,y,\ldots) = \lim_{h=0} f''_{yx}(x+h,y,\ldots) = \lim_{h=0} f''_{xy}(x+h,y,\ldots).$$

R. C'est l'application du théorème précédent.

10. Déterminer, en appliquant le principe précédent, les dérivées partielles du second ordre au point $x=y=0$ de la fonction.

$$f(x, y) = x^2 \text{ arc tg} \frac{y}{x} - y^2 \text{ arc tg } \frac{x}{y},$$

R. On trouve en général

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

On en conclut

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{x=0} f''_{xy}(x, 0) = 1$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y=0} f''_{xy}(0, y) = -1.$$

11. Déterminer les dérivées partielles à l'origine de

$$f(x, y, z) = (x + z)^2 \text{ arc tg } \frac{y - z}{x + z} - (y - z)^2 \text{ arc tg} \frac{x + z}{y - z}.$$

12. Déterminer directement les dérivées partielles des deux exercices précédents en recourant à la définition générale de la dérivée.

§ 3. Extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.

164. Formule de Taylor. — Considérons une fonction $f(x, y, \ldots)$ de plusieurs variables. La formule de Taylor a pour but de développer la différence $f(a + h, b + k, \ldots) - f(a, b, \ldots)$ sous forme d'une somme de polynomes homogènes et de degrés respectifs 1, 2,... $(n - 1)$ par rapport aux accroissements $h, k, \ldots$ des variables.

Le problème de trouver ce développement se ramène à celui qui a été résolu pour les fonctions d'une seule variable. Pour abréger l'écriture, considérons seulement une fonction de deux variables.

Soit $u = f(x, y)$ une fonction *différentiable* jusqu'à l'ordre n pour toutes les valeurs de x entre a et $a + h$ et toutes celles de y entre b et $b + k$. Soit ensuite t une nouvelle variable indépendante ; posons

$$\begin{aligned} x &= a + ht, \\ y &= b + kt, \end{aligned} \quad \text{d'où } u = f(x, y) = \varphi(t).$$

De la sorte, u est une fonction composée de t dont les dérivées seront déterminées jusqu'à l'ordre n et continues jusqu'à l'ordre $n - 1$ inclusivement dans l'intervalle (0, 1). On a donc, par la formule de Maclaurin (n° 125) pour une seule variable t (prise égale à 1) et avec le reste de Lagrange,

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(0)+\dfrac{\varphi''(0)}{2!}+\cdots+\dfrac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\dfrac{\varphi^{(n)}(\theta)}{n!}. \\ (0<\theta<1). \end{cases}$$

Les différentielles $dx = hdt$ et $dy = kdt$ étant constantes, les différentielles successives de $f(x, y)$ se calculent par la formule symbolique du n° 156 et l'on a

$$d^p u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^p f(x, y),$$

d'où

$$(2)\qquad \varphi^{(p)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^p f(x, y).$$

Pour $t = 0$, on a $x = a$, $y = b$, et la formule (2) prend la forme

$$\varphi^{(p)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^p f(a, b).$$

Pour $t = \theta$, on a $x = a + \theta h$, $y = b + \theta k$ et la formule (2) devient

$$\varphi^{(p)}(\theta) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^p f(a + \theta h, b + \theta k).$$

Portons ces valeurs dans (1), nous trouvons la *formule de Taylor :*

$$(3)\quad \begin{cases} f(a+h, b+k) - f(a, b) = \left(h\dfrac{\partial}{\partial a} + k\dfrac{\partial}{\partial b}\right) f(a, b) \\ \qquad + \dfrac{1}{2!}\left(h\dfrac{\partial}{\partial a} + k\dfrac{\partial}{\partial b}\right)^2 f(a, b) + \cdots \\ \qquad + \dfrac{1}{(n-1)!}\left(h\dfrac{\partial}{\partial a} + k\dfrac{\partial}{\partial b}\right)^{n-1} f(a, b) \\ \qquad + \dfrac{1}{n!}\left(h\dfrac{\partial}{\partial a} + k\dfrac{\partial}{\partial b}\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k). \end{cases}$$

Cette formule ne suppose pas la continuité des dérivées de l'ordre n.

Lorsque x et y sont des variables indépendantes, on peut écrire $h = dx$, $k = dy$; si l'on remplace alors a par x et b par y dans la formule (3), elle devient

$$\Delta f(x, y) = df + \frac{d^2 f}{2!} + \cdots + \frac{d^{n-1} f}{(n-1)!} + \left[\frac{d^n f}{n!}\right]_{x+\theta dx,\, y+\theta dy}$$
$$(0 < \theta < 1)$$

seulement, ces différentielles sont maintenant des différentielles totales. La notation employée pour le dernier terme

signifie qu'il faut remplacer, dans les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ qui entrent dans ce terme, x par $x + \theta\, dx$ et y par $y + \theta\, dy$.

Ces résultats s'étendent d'eux-mêmes aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Ainsi, pour trois variables,

$$f(a+h, b+k, c+l) = f(a,b,c) + \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + l\frac{\partial}{\partial c}\right)f(a, b, c)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + l\frac{\partial}{\partial c}\right)^2 f(a, b, c) + \cdots$$

et ainsi de suite.

165. Formule de Maclaurin. — Celle-ci se déduit de la formule (3) en y faisant $a = b = 0$, $h = x$ et $k = y$. Nous écrirons le résultat comme il suit :

$$f(x, y) = f(0,0) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)f_{0,0} + \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f_{0,0} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f_{0,0} + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f_{\theta x\, \theta y}.$$

Ces indices signifient qu'après avoir calculé les dérivées partielles, il faut y remplacer x et y par 0. La formule de Maclaurin développe donc la fonction en une somme de termes homogènes et de degrés croissants en x, y.

§ 4. Maximés et minimés (extrémés) libres des fonctions de plusieurs variables.

166. Fonctions de deux variables. — On dit qu'une fonction $f(x, y)$ de deux variables indépendantes est extrémée au point (a, b), lorsque la différence

$$f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b)$$

garde le même signe pour toutes les valeurs de h et de k inférieures en valeur absolue à un nombre positif suffisamment petit. La fonction est *maximée* si cette différence est négative et *minimée* si elle est positive. Les extrémés des fonctions de plusieurs variables indépendantes sont appelés *libres*. S'il y avait des relations entre les variables, les extrémés seraient *liés*. Nous étudierons ce cas plus loin.

Tout d'abord la fonction, pour être extrémée, doit l'être quand on ne fait varier que x seul ou y seul ; de là, le théorème suivant :

Les seuls points où la fonction $f(x, y)$ puisse être extrémée sont ceux où chacune de ses deux dérivées partielles f'_x et f'_y s'annule ou cesse d'exister.

Supposons $f(x, y)$ différentiable ; pour trouver ses extrémés, il faudra donc poser les deux équations simultanées :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

En résolvant ces équations par rapport à x et à y, on trouve généralement un certain nombre de solutions. Soit $x = a$, $y = b$ l'une d'elles. Il reste à examiner s'il y a réellement maximé ou minimé en ce point. Voici la méthode à suivre pour trancher cette question.

Supposons les dérivées partielles premières *différentiables* au point (a, b). Développons la différence $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ par la formule de Taylor en nous arrêtant au premier ordre, ce qui est légitime si $|h|$ et $|k|$ sont assez petits (n° 164). Il viendra

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf'_a(a+\theta h, b+\theta k) + kf'_b(a+\theta h, b+\theta k).$$

Posons

$$r = \sqrt{h^2 + k^2}, \qquad h = r \sin\alpha, \qquad k = r\cos\alpha,$$

de sorte que r est une quantité positive infiniment petite et α un angle arbitraire avec h et k. Ecrivons encore, en abrégé,

$$\text{A} = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a^2}, \qquad \text{B} = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a \partial b}, \qquad \text{C} = \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial b^2}$$

et désignons par ε', ε'' des quantités infiniment petites avec r. Les dérivées partielles premières étant différentiables au point (a, b) et nulles en ce point, on a

$$f'_a(a + \theta h, b + \theta k) = \theta(\text{A}h + \text{B}k + \varepsilon' r),$$
$$f'_b(a + \theta h, b + \theta k) = \theta(\text{B}h + \text{C}k + \varepsilon'' r).$$

Substituant ces valeurs, la différence $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ prend la forme

$$(1) \qquad \theta r^2[\text{A} \sin^2\alpha + 2\,\text{B} \sin\alpha\cos\alpha + \text{C}\cos^2\alpha + \varepsilon],$$

où $\varepsilon = \varepsilon' \cos\alpha + \varepsilon'' \sin\alpha$ et tend encore vers 0 avec r.

La considération de cette expression conduit, θ étant positif, aux conclusions suivantes :

1°) Si le trinome

$$A \sin^2 \alpha + 2 B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$$

ne peut s'annuler, comme il est fonction continue de α, il conservera un signe invariable et sa valeur absolue restera supérieure à un nombre positif m. C'est donc ce trinome qui donnera son signe à l'expression (1) dès que l'on aura $|\varepsilon| < m$, donc à partir d'une valeur suffisamment petite de r, quel que soit α. Il y aura maximé ou minimé selon que le trinome sera négatif ou positif.

2°) Si le trinome peut changer de signe, comme il donne encore son signe à l'expression (1), pour chaque valeur de α qui ne l'annule pas, à partir d'une valeur suffisamment petite de r, il n'y aura ni maximé ni minimé.

3°) Enfin, si le trinome, sans pouvoir changer de signe, peut cependant s'annuler pour certaines valeurs de α, pour ces valeurs, le signe de l'expression (1) dépend de celui de ε qui reste inconnu et l'on ne peut rien conclure.

Les caractères analytiques particuliers à ces trois cas sont faciles à indiquer :

Supposons A différent de zéro. Le trinome peut se mettre sous forme de fraction, comme il suit :

$$\frac{(A \sin \alpha + B \cos \alpha)^2 + (AC - B^2) \cos^2 \alpha}{A}.$$

1°) Si $AC - B^2 > 0$, le numérateur de cette fraction est une somme de deux carrés qui ne peuvent s'annuler ensemble et il est toujours positif. Donc le trinome ne peut s'annuler et a le signe de A. Il y a maximé si $A < 0$ et minimé si $A > 0$.

2°) Si $AC - B^2 < 0$, le numérateur a des signes différents dans les hypothèses $\cos \alpha = 0$ et $\operatorname{tg} \alpha = - B : A$, le trinome change de signe et il n'y a ni maximé ni minimé.

3°) Si $AC - B^2 = 0$, le numérateur se réduit à un seul carré, le trinome, sans changer de signe, peut s'annuler. C'est le cas douteux.

Supposons encore que A soit nul. Le trinome se réduit à

$$\cos\alpha\,(2B \sin \alpha + C \cos \alpha).$$

Si B n'est pas nul, cette expression change de signe avec $\cos\alpha$ supposé infiniment petit, et il n'y a ni maximé ni minimé.

Enfin, si A et B sont nuls tous les deux, le trinome se réduit

à $C\cos^2\alpha$, qui peut s'annuler mais ne peut changer de signe. C'est encore une fois le cas douteux.

Cette théorie ne suppose pas la continuité des dérivées secondes ni même leur existence aux environs du point (a, b).

Remarque. — C'est uniquement pour rendre la discussion plus claire qu'on a remplacé h et k par $r\sin\alpha$ et $r\cos\alpha$, mais cette substitution n'est pas nécessaire. Le raisonnement peut se faire directement sur le trinome

$$A\,h^2 + 2\,B\,hk + C\,k^2,$$

c'est-à-dire sur l'ensemble des termes du second ordre de la formule de Taylor, et les résultats obtenus peuvent se résumer comme il suit :

1° Il n'y a ni maximé ni minimé si les racines de ce trinome sont réelles et inégales ;

2° Il y a extrémé si les racines sont imaginaires : maximé si A est < 0, minimé si A est > 0 ;

3° Doute, si les racines sont égales.

Pour trancher le cas douteux, il faut faire intervenir des termes d'ordre plus élevé, mais la discussion générale est assez dfficile et ne peut trouver place ici.

167. Fonctions de plusieurs variables. — Une méthode semblable s'applique aux fonctions de trois et d'un plus grand nombre de variables. Pour que $f(x, y, z)$ soit extrémée au point (a, b, c), il faut, dans l'hypothèse la différentiabilité, que ses trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z s'annulent en ce point, ou, ce qui revient au même, que sa différentielle totale df soit identiquement nulle. En exprimant que ces conditions sont satisfaites, on obtient un système d'équations simultanées dont les solutions peuvent fournir des extrémés. Pour s'en assurer, on remplace x, y, z par $a+h, b+k, c+l$ et l'on calcule d^2f, c'est-à-dire l'ensemble des termes du 2e ordre en h, k, l. Ce sera un polynome homogène du second degré, qui devra avoir un signe unique. On le transforme donc en une somme algébrique de carrés : 1° Si tous ces carrés ne sont pas de même signe, il n'y a pas d'extrémé ; 2° s'ils sont tous de même signe, il y a minimé s'ils sont positifs et maximé s'ils sont négatifs, pourvu qu'ils ne puissent s'annuler en même temps que pour $h=k=l=0$;

3° si tous les carrés sont de même signe mais peuvent s'annuler ensemble, le doute subsiste.

168. Problème. — *Trouver la plus courte distance de deux droites* A *et* B *de l'espace.*

Soient a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un point a de la droite A, et α_1, α_2, α_3 les cosinus directeurs de cette droite ; les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de cette même droite peuvent s'exprimer au moyen d'une variable indépendante u par les formules :

$$\text{(A)} \qquad \frac{x-a_1}{\alpha_1}=\frac{y-a_2}{\alpha_2}=\frac{z-a_3}{\alpha_3}=u.$$

De mêmes, les coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de la droite B s'exprimeront en fonction d'une seconde variable indépendante v par les formules :

$$\text{(B)} \qquad \frac{\xi-b_1}{\beta_1}=\frac{\eta-b_2}{\beta_2}=\frac{\zeta-b_3}{\beta_3}=v,$$

où b_1, b_2, b_3 sont les coordonnées d'un point b et β_1, β_2, β_3 les cosinus directeurs de la droite B.

Soit δ la distance de deux points (x, y, z) et (ξ, η, ζ) pris sur chacune des droites A et B. On a

$$\text{(1)} \qquad \delta^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2.$$

C'est une fonction de u et de v en vertu des équations (A) et (B) et il faut en chercher le minimé. Pour cela, il faut annuler ses deux dérivées partielles. En se servant des relations :

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \xi-x=\beta_1 v-\alpha_1 u+(b_1-a_1), \\ \eta-y=\beta_2 v-\alpha_2 u+(b_2-a_2), \\ \zeta-z=\beta_3 v-\alpha_3 u+(b_3-a_3); \end{cases}$$

et en appliquant la règle de dérivation des fonctions de fonctions, on trouve ainsi

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\delta^2}{\partial u}=(\xi-x)\,\alpha_1+(\eta-y)\,\alpha_2+(\zeta-z)\,\alpha_3=0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\delta^2}{\partial v}=(\xi-x)\,\beta_1+(\eta-y)\,\beta_2+(\zeta-z)\,\beta_3=0. \end{cases}$$

Ces équations sont susceptibles d'une interprétation géométrique immédiate. En effet, désignons par τ_1, τ_2, τ_3 les cosinus

directeurs de la plus courte distance δ des deux droites ; on a

$$(4) \qquad \xi - x = \delta\tau_1, \quad \eta - y = \delta\tau_2, \quad \zeta - z = \delta\tau_3,$$

et les équations (3) peuvent s'écrire

$$(5) \qquad \begin{cases} \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 + \tau_3\alpha_3 = 0, \\ \tau_1\beta_1 + \tau_2\beta_2 + \tau_3\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Elles expriment donc que la plus courte distance est une perpendiculaire commune aux deux droites A et B. Les cosinus directeurs de la plus courte distance sont fournis par ces dernières équations. En effet, si l'on pose, en abrégé,

$$(6) \quad T_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad T_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3. \quad T_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1,$$

il vient

$$(7) \qquad \frac{\tau_1}{T_1} = \frac{\tau_2}{T_2} = \frac{\tau_3}{T_3} = \frac{1}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}}.$$

La valeur de la plus courte distance elle-même s'en déduit aussi ; car, en additionnant les équations (4) multipliées respectivement par τ_1, τ_2, τ_3, il vient

$$\delta = \tau_1(\xi - x) + \tau_2(\eta - y) + \tau_3(\zeta - z) ;$$

puis, en remplaçant les parenthèses par leurs valeurs (2) et en tenant compte des équations (5) et (7), on trouve

$$(8) \qquad \begin{aligned} \delta &= \tau_1(b_1 - a_1) + \tau_2(b_2 - a_2) + \tau_3(b_3 - a_3) \\ &= \frac{T_1(b_1 - a_1) + T_2(b_2 - a_2) + T_3(b_3 - a_3)}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}}. \end{aligned}$$

Enfin, il reste encore à trouver les valeurs de u et de v correspondant aux extrémités de la plus courte distance. Pour cela, on remplace dans les équations (3) les parenthèses par les valeurs (2) et l'on trouve, par les propriétés des cosinus directeurs d'une droite, les deux équations suivantes :

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \delta^2}{\partial u} = u - v\cos(A, B) - p = 0, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \delta^2}{\partial v} = u\cos(A, B) - v - q = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé, en abrégé,

$$\begin{cases} p = (b_1 - a_1)\alpha_1 + (b_2 - a_2)\alpha_2 + (b_3 - a_3)\alpha_3, \\ q = (b_1 - a_1)\beta_1 + (b_2 - a_2)\beta_2 + (b_3 - a_3)\beta_3. \end{cases}$$

On en tire

$$(10) \quad u = \frac{p - q\cos(A, B)}{\sin^2(A, B)}, \qquad v = \frac{p\cos(A, B) - q}{\sin^2(A, B)},$$

ce qui achève la solution du problème.

Remarque. — On vérifie facilement que la solution précédente satisfait aux conditions analytiques d'un minimé. En effet, on tire des équations (9)

$$\frac{\partial^2 \delta^2}{\partial u^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 \delta^2}{\partial u \partial v} = -2\cos(A, B), \qquad \frac{\partial^2 \delta^2}{\partial v^2} = 2$$

Donc la quantité représentée par $AC - B^2$ dans la théorie générale est égale à $4\sin^2(A, B)$. Elle est positive, et il y a minimé parce que la quantité A est positive.

Exercices.

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.
R. Une solution : $x = 3, y = 3$ (minimé).

2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
R. Trois solutions : $x = +\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ (minimé) ; $x = -\sqrt{2}, y = +\sqrt{2}$ (minimé) ; $x = 0, y = 0$ (pas d'extrémé).

3. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$.
R. Une solution : $x = 0, y = 0$ (cas douteux). Comme la fonction peut se mettre sous la forme $(x - y^2)^2 - y^5$, on voit facilement qu'il n'y a pas d'extrémé.

On remarquera que cependant la fonction $f(ht, kt)$ de t seul est maximée pour $t = 0$ quels que soient les coefficients h et k. Cet exemple prouve donc, contrairement à l'affirmation de certains auteurs, que l'existence d'un extrémé de $f(a + ht, b + kt)$ pour $t = 0$ quels que soient h et k, n'entraîne pas l'existence d'un extrémé de $f(x, y)$ au point (a, b).

4. Etant donné un triangle, trouver dans le plan du triangle un point O tel que la somme des carrés de ses distances aux trois sommets soit minimée.
R. Soient (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) les coordonnées rectangulaires des trois sommets, (x, y) celles du point O. On trouve

$$3x = a_1 + a_2 + a_3, \qquad 3y = b_1 + b_2 + b_3.$$

Le point O est le centre de gravité du triangle.

5. Etant donné un triangle, trouver dans le plan de ce triangle un point O tel que la somme de ses distances aux trois sommets soit minimée.
R. Conservant les notations précédentes, il faut minimer

$$f(x, y) = \Sigma \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Soient r_1, r_2, r_3 les droites joignant le point O aux trois sommets, et θ_1, θ_2, θ_3 leurs angles avec l'axe des x. On a, si les dérivées partielles s'annulent,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = 0.$$

L'axe des x étant quelconque, on en conclut que les trois droites r_1, r_2, r_3 font entre elles le même angle. Le minimé a lieu au point où les trois côtés du triangle sont vus sous le même angle (120°). Ce point est facile à construire si les trois angles du triangle sont $< 120°$. Mais si l'un des angles, A par exemple, est $> 120°$, ce point n'existe plus. On montrera que, dans ce cas, le minimé a lieu quand le point O vient coïncider avec le sommet A du triangle. C'est un exemple remarquable où l'extrémé correspond à un point de discontinuité des dérivées.

CHAPITRE IV.

Fonctions implicites. Changement de variables.

---

§ 1. Théorèmes d'existences.

Les fonctions implicites sont celles qui sont définies par des équations non résolues. Nous commencerons par démontrer les théorèmes fondamentaux sur les conditions d'existence de ces fonctions. Il en résultera que *les équations différentiables ne définissent que des fonctions différentiables.*

169. Théorème I. — *Soit* $F(u, x, y, \ldots)$ *une fonction continue des variables* $u, x, y, \ldots$ *Supposons qu'en un point particulier* $M(u_0, a, b, \ldots)$, *la fonction* F *soit :* 1° *nulle,* 2° *différentiable,* 3° *douée d'une dérivée* F'_u *non nulle. Alors il existe au moins une fonction* $u = \varphi(x, y, \ldots)$ *qui se réduit à* u_0 *au point* $(a, b, \ldots)$ *et qui, dans son voisinage, satisfait identiquement à l'équation*

$$F(u, x, y, \ldots) = 0\,;$$

enfin toute fonction u qui possède ces deux propriétés est différentiable (donc continue) en ce même point (Young).

Il suffira de considérer trois variables u, x, y. Puisque F est nulle au point M et que F'_u ne l'est pas, on peut d'abord se donner un δ positif assez petit pour que

$$F(u_0 - \delta, a, b) \qquad \text{et} \qquad F(u_0 + \delta, a, b)$$

soient de signes contraires, car F est une fonction croissante ou décroissante de u au point u_0. Ensuite, puisque F est continue, on peut se donner un δ' positif assez petit pour que les quantités, aussi voisines qu'on veut des précédentes,

$$F(u_0 - \delta, x, y) \qquad \text{et} \qquad F(u_0 - \delta, x, y)$$

soient aussi de signes contraires sous la condition que $|x - a|$ et $|y - b|$ soient $< \delta'$.

Ceci fait, donnons nous un système quelconque x, y entre ces limites ; $F(u, x, y)$ est une fonction continue de u qui change de signe entre $u_0 - \delta$ et $u_0 + \delta$ et s'annule, par conséquent, dans cet intervalle. Soit $u = \varphi(x, y)$ la racine (la plus grande s'il y en a plusieurs) : ce sera une solution de $F = 0$ se réduisant à u_0 au point (a, b).

Soient maintenant Δu, Δx, Δy les accroissements correspondants d'une telle fonction u et de x, y à partir du point (a, b). Puisque F est différentiable au point (u_0, a, b), on a

$$\Delta F = (F'_{u_0} + \varepsilon)\Delta u + (F'_a + \varepsilon')\Delta x + (F'_b + \varepsilon'')\Delta y = 0,$$

où les ε tendent vers 0 avec les Δ et peuvent donc être supposés aussi petits qu'on veut avec δ et δ'. Nous supposerons δ et δ' assez petits pour que les ε soient $< \frac{1}{2}\left|F'_{u_0}\right|$ qui n'est pas nul. Alors l'équation précédente montre que Δu tend vers 0 avec Δx et Δy, donc que la fonction u est *continue* au point (a, b).

Cette équation montre, de plus, que la fonction est *différentiable* au point (a, b), car on en tire

$$\Delta u = -\frac{(F'_a + \varepsilon')\Delta x + (F'_b + \varepsilon'')\Delta y}{F'_{u_0} + \varepsilon},$$

c'est-à-dire

$$\Delta u = -\frac{F'_a}{F'_{u_0}}\Delta x - \frac{F'_b}{F'_{u_0}}\Delta y + \varepsilon'''\Delta x + \varepsilon^{\text{IV}}\Delta y,$$

où les ε tendent encore vers 0 avec les Δ, donc avec Δx et Δy.

Remarques. — *Si F'_u existe et ne s'annule pas au voisinage du point (u_0, a, b), la solution u de l'équation $F = 0$ est unique.*

En effet, s'il y en avait deux u et u', on aurait, contrairement à l'hypothèse, pour une valeur U comprise entre u et u',

$$0 = F(u, x, y) - F(u', x, y) = (u - u')F'_u(U, x, y)$$
$$F'_u(U, x, y) = 0.$$

Si, de plus, F est différentiable aux environs du point (u_0, a, b), la fonction u est différentiable au voisinage de (a, b), car la démonstration précédente s'applique en chaque point (u, x, y).

170. Théorème II. — *Soient n fonctions $F_1, F_2, \ldots F_n$ des $m + n$ variables $x, y, \ldots u, v, w, \ldots$ Supposons qu'en un point*

M$(a, b, \ldots u_0, v_0, w_0, \ldots)$, *les fonctions* F *soient : 1° nulles, 2° différentiables, 3° telles que le déterminant*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} & \cdots \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u} & \frac{\partial F_n}{\partial v} & \frac{\partial F_n}{\partial w} & \cdots \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas au point M. *Alors il existe au moins un système de fonctions* $u, v, w, \ldots$ *des* m *variables* $x, y, \ldots$ *se réduisant à* $u_0, v_0, w_0, \ldots$ *au point* $a, b, \ldots$ *et satisfaisant identiquement aux équations* $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots F_n = 0$ *aux environs de ce point. Ensuite tout système de fonctions de* $x, y, \ldots$ *possédant ces deux propriétés est différentiable au point* $(a, b, \ldots)$. *Enfin, si les dérivées partielles qui composent le déterminant* J *sont des fonctions continues de* $x, y, \ldots u, v, w, \ldots$ *au point* M, J *ne 'annule pas au voisinage de* M *et le système de ces solutions* $u, v, w, \ldots$ *est unique* (Joung).

Ce théorème se réduit au précédent quand il n'y a qu'une seule équation. Pour l'établir en général, admettons qu'il ait été déjà établi pour $n - 1$ équations et montrons qu'il subsiste pour n.

Désignons par $J_1, J_2, \ldots J_n$ les mineurs relatifs aux éléments de la première colonne de J ; on aura

$$(1) \qquad J = J_1 \frac{\partial F_1}{\partial u} + J_2 \frac{\partial F_2}{\partial u} + \cdots + J_n \frac{\partial F_n}{\partial u}.$$

Comme J ne s'annule pas au point M, il faut que l'un au moins des mineurs ne s'annule pas en ce point et nous pouvons supposer que ce soit J_1. Dans l'hypothèse où les dérivées sont continues au point M, J_1 ne s'annulera pas non plus dans les environs de ce point.

Or le théorème est supposé s'appliquer pour $(n - 1)$ équations. Donc, J_1 étant différent de zéro, il existe un système (unique dans la dernière hypothèse) de $(n - 1)$ fonctions :

$$(2) \qquad v = V(x, y, \ldots u), \qquad w = W(x. y, \ldots u), \ldots$$

de $m + 1$ variables indépendantes $x, y, \ldots u$, se réduisant à

v_0, w_0,... au point $(a, b, \dots u_0)$, différentiables en ce point et satisfaisant identiquement aux $n - 1$ équations :

$$(3) \quad F_2(x, y, \dots u, V, W, \dots) = 0, \dots, F_n(x, y, \dots u, V, W, \dots) = 0.$$

Si l'on substitue ces fonctions dans la relation $F_1 = 0$ qui reste seule à vérifier, elle devient

$$(4) \qquad F_1(x, y, \dots u, V, W, \dots) = \Phi(x, y, \dots u) = 0.$$

En vertu du théorème I, il existe au moins une fonction u des m variables $x, y, \dots$ se réduisant à u_0 au point $a, b, \dots$ satisfaisant à l'équation précédente dans le voisinage de ce point et différentiable, pourvu que $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ ne s'annule pas en ce point. Mais cette condition est réalisée. En effet, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial u} + \cdots$$

Multiplions cette relation par J_1 et ajoutons membre à membre avec les identités ci-dessous, multipliées respectivement par J_2, J_3,..., identités qui s'obtiennent en dérivant par rapport à u les relations (3) :

$$0 = \frac{\partial F_2}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial u} + \cdots,$$
$$0 = \frac{\partial F_3}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial w}\frac{\partial W}{\partial u} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il viendra, par l'équation (1) et les propriétés des mineurs d'un déterminant,

$$J_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u} = J, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = J : J_1.$$

Donc, puisque J et J_1 sont différents de zéro, $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ l'est aussi.

Enfin, si les dérivées partielles sont continues au point M, la solution u est unique, puisque $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ ne s'annulera pas non plus dans le voisinage du point $(a, b, \dots)$.

Si l'on substitue dans les équations (2) la fonction u dont l'existence vient d'être établie, on obtient pour $u, v, w, \dots$ un système de fonctions de $x, y, \dots$ qui satisfont à toutes les conditions requises dans l'énoncé du théorème.

§ 2. Différentiation des fonctions implicites.

171. Les fonctions implicites sont celles qui sont définies par des équations non résolues. Dans le paragraphe précédent, on a indiqué sous quelles conditions on peut s'assurer de l'existence de ces fonctions et l'on a montré que les équations différentiables définissent des fonctions défférentiables. Ceci admis, la détermination des dérivées et des différentielles des fonctions implicites se fait, sans aucune difficulté et par une méthode uniforme, en différentiant totalement les équations qui définissent les fonctions.

172. Dérivées et différentielles du 1er ordre. — 1° Considérons d'abord la fonction implicite y d'une seule variable x, définie par une équation différentiable unique

$$F(x, y) = 0.$$

Différentions totalement cette équation (n° 161), il vient

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0,$$

d'où nous tirons, pourvu que F'_y ne soit pas nul,

$$dy = -\frac{F'_x}{F'_y} dx, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

ce qui fait connaître la dérivée et la différentielle de y au moyen des dérivées partielles de F.

On peut aussi obtenir la dérivée de y sans passer par la différentielle. On observe que $F(x, y)$ est une *fonction composée de* x qui demeure constante quand on y remplace y par sa valeur $\varphi(x)$ tirée de l'équation $F = 0$. Donc sa dérivée sera nulle, et il vient, par la règle du n° 160,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

équation d'où l'on tire aussi $\frac{dy}{dx}$. Quand on opère ainsi, on dit souvent que l'on *dérive totalement* l'équation proposée par rapport à x.

2° Soit maintenant u une fonction implicite des variables indépendantes $x, y, \ldots$, définie par l'équation différentiable

$$F(x, y, \ldots u) = 0.$$

Il vient, en différentiant,

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u} du = 0 ;$$

et l'on en tire l'expression de la différentielle totale

$$du = -\frac{F'_x dx + F'_y dy + \cdots}{F_u},$$

pourvu que F'_u ne soit pas nul.

Les dérivées partielles de u sont les coefficients de dx, de dy,...

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u}, \ldots$$

D'ailleurs ces valeurs s'obtiennent par le même calcul que dans le premier cas, en considérant toutes les variables indépendantes sauf une comme constantes, et u comme fonction d'une seule variable.

3° Considérons maintenant m fonctions implicites u, v,... d'une seule variable indépendante x, définies par m équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} F_i(x, u, v, \ldots) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

Il vient, en différentiant totalement ces m équations,

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_i}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F_i}{\partial u} du + \dfrac{\partial F_i}{\partial v} dv + \cdots = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

Soit J le déterminant des coefficients de du, dv,..., à savoir

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} & \cdots \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Si J n'est pas nul, on tire des équations (2) les valeurs de du, de dv,... sous forme de fractions ayant pour dénominateur commun J. En divisant par dx, on trouve les dérivées. D'ailleurs ces dérivées peuvent aussi s'obtenir, sans passer par les différentielles, en *dérivant totalement* les équations (1) par rapport à x, ce qui revient à diviser les équations (2) par dx.

4° Passons enfin au cas général. Soient m fonctions implicites

$u, v, \ldots$ de n variables indépendantes $x, y, \ldots$, définies par m équations simultanées :

$$(1) \quad \begin{cases} F_i(x, y, \ldots, u, v, \ldots) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

En différentiant totalement ces équations, il vient

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_i}{\partial x} dx + \frac{\partial F_i}{\partial y} dy + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial u} du + \frac{\partial F_i}{\partial v} dv + \cdots = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

Soit, comme dans le cas précédent, J le déterminant des coefficients de $du, dv, \ldots$ Si J n'est pas nul, on résout les équations (2) par rapport à $du, dv, \ldots$ On obtient ces différentielles sous forme de fractions ayant J pour dénominateur commun et dont les numérateurs sont linéaires par rapport à $dx, dy, \ldots$ Les dérivées partielles d'une des fonctions sont respectivement les coefficients de dx, de $dy, \ldots$ dans sa différentielle. Elles s'expriment donc rationnellement au moyen des dérivées partielles des fonctions F_i par rapport aux variables $x, y, \ldots u, v, \ldots$ et elles ont J pour dénominateur commun. On peut aussi les obtenir directement, comme dans le cas précédent, en considérant $u, v, \ldots$ comme fonction de x seul, de y seul, etc.

173. Dérivées et différentielles successives. — Les dérivées et les différentielles du deuxième ordre, du troisième, etc... s'obtiennent par l'application des mêmes principes, en différentiant ou en dérivant totalement deux fois, trois fois... l'équation ou les équations proposées toujours supposées différentiables. Aucune notion nouvelle ne s'introduit, mais il faut observer que, dans ces différentiations successives, les différentielles premières des variables indépendantes doivent être traitées comme des constantes, tandis que les différentielles des fonctions sont elles mêmes des fonctions ayant des différentielles successives que l'on désigne par les caractéristiques $d, d^2, \ldots d^n$ et qui sont précisément les inconnues que l'on cherche.

Soit d'abord à déterminer les dérivées successives d'une fonction y de x, définie par une seule équation $F(x, y) = 0$. On a, en dérivant successivement,

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}=0.$$

. . . .

La première équation donne Dy, la deuxième D^2y après qu'on a remplacé Dy par sa valeur, la troisième D^3y après avoir remplacé Dy et D^2y par leurs valeurs, et ainsi de suite.

Pasons enfin au cas général où m fonctions $u, v, \ldots$ des n variables indépendantes $x, y, \ldots$ sont définies par le système de m équations :

$$F_i(x, y, \ldots u, v, \ldots)=0, \qquad (i=1, 2, \ldots m).$$

En différentiant de proche en proche, on en tire les systèmes successifs :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\cdots+\frac{\partial}{\partial u}du+\frac{\partial}{\partial v}du+\cdots\right)F_i=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\cdots+\frac{\partial}{\partial u}du+\cdots\right)^2F_i+\frac{\partial F_i}{\partial u}d^2u+\frac{\partial F_i}{\partial v}d^2v+\cdots=0,$$

. . . .

Le premier système donne $du, dv, \ldots$ Portant ces valeurs dans le système suivant, on en déduit $d^2u, d^2v, \ldots$ et ainsi de suite. On a chaque fois à résoudre un système d'équations linéaires : les inconnues sont $du, dv, \ldots$ dans le premier ; $d^2u, d^2v, \ldots$ dans le second, etc... On remarquera que le déterminant des coefficients des inconnues est, dans tous ces systèmes, le même déterminant J supposé différent de 0.

Les dérivées partielles d'ordre p des fonctions $u, \ldots$ s'obtiennent encore, par le principe du nº 157, en identifiant la valeur obtenue pour d^pu avec l'expression générale de cette différentielle

$$d^p u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\cdots\right)^p u.$$

On peut aussi déterminer ces dérivées par des dérivations totales successives effectuées sur les équations proposées par rapport à chacune des variables indépendantes, mais le procédé par différentiations totales successives sera généralement plus pratique.

Exercices.

1. Calculer les dérivées successives de la fonction y de x définie par l'équation

$$\operatorname{Log} \sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\cdot$$

R. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)^3}, \ldots,$

2. Dérivées successives des fonctions y et z de x définies par les deux équations

$$x+y+z=a, \qquad x^2+y^2+z^2=b^2.$$

R. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{z-x}{y-z}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3b^2-a^2}{(z-y)^3}, \ldots$

3. Différentielles totales et dérivées partielles de la fonction z des variables x et y définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

R. $dz=-\dfrac{c^2}{z}\left(\dfrac{x}{a^2}\,dx+\dfrac{y}{b^2}\,dy\right)$

$$d^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}\,dxdy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$$

4. Différentielles totales et dérivées partielles des fonctions z et u de x et y définies par deux équations

$$x+y+z+u=a, \qquad x^2+y^2+z^2+u^2=b.$$

R. $dz=\dfrac{(u-x)\,dx+(u-y)\,dy}{z-u}$, $du=\dfrac{(z-x)\,dx+(z-y)\,dy}{u-z}, \ldots$

5. Etant données deux équations entre quatre variables $x. y. u, v$, on peut considérer u, v comme fonctions de x, y ou x, y comme fonctions de u, v. Les dérivées partielles de u, v dans la première hypothèse, celles de x, y dans la seconde, vérifient les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}=1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial v}=0,$$

et deux autres analogues qu'on obtient en permutant x et y dans les précédentes.

§ 3. Extrémés liés.

174. Extrémés liés d'une fonction explicite de deux variables. — Soit $f(x, y)$ une fonction différentiable de deux variables x et y liées entre elles par une équation différentiable

$$F(x, y)=0.$$

en sorte que f ne dépend en réalité que d'une seule variable, par exemple x. Il s'agit de déterminer ses maximés et ses minimés. Ceux-ci sont ce qu'on appelle des maximés ou des minimés liés.

En supposant toujours satisfaites les conditions d'existence et de continuité, on est donc conduit à annuler la dérivée *totale* de $f(x, y)$, y étant considérée comme fonction de x. D'autre part, y' s'obtient en dérivant l'équation $F(x, y) = 0$. On trouve ainsi les deux équations :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0,$$

d'où l'on tire, en éliminant y',

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Cette équation, combinée avec $F = 0$, donnera les systèmes de valeurs de x, y pour lesquels f peut être extrémée. La vérification pourra se faire au moyen du signe d^2f.

175. Cas général. — Supposons que l'on cherche les maximés et les minimés d'une fonction différentiable, $f(x, y, .., u, v, ...)$, de $m + n$ variables liées entre elles par n équations indépendantes et différentiables :

$$(1) \qquad F_i(x, y, ...; u, v, ...) = 0, \qquad (i = 1, 2, ... n),$$

de sorte que f ne dépend en réalité que de m variables indépendantes, par exemple $x, y, ...$ Laissant de côté les cas de discontinuité, tout système de valeurs de ces m variables qui extrèmera f devra annuler sa différentielle totale (n° 167). D'autre part, les équations (1) peuvent être différentiées totalement. On est donc conduit à poser le système de $(n + 1)$ équations :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial u} du + \cdots = 0, \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F_i}{\partial y} dy + \cdots + \dfrac{\partial F_i}{\partial u} du + \cdots = 0. \\ \qquad (i = 1, 2, ... n) \end{cases}$$

Entre celles-ci, on peut éliminer les différentielles $du, dv, ...$ des n variables indépendantes. L'équation résultante sera de la forme

$$M dx + N dy + \cdots = 0 ;$$

et, comme elle ne renferme plus que les m différentielles arbitraires, elle se décompose en m autres :

$$M = 0, \qquad N = 0, \ldots$$

qui, jointes aux n équations (1), constituent un système de $(m + n)$ équations simultanées entre les $(m + n)$ inconnues $x, y, \ldots u, v \ldots$ En résolvant ces équations, on trouve les systèmes de valeurs des inconnues qui peuvent extrémer f. Il restera à discuter ces valeurs au moyen du signe de d^2f ou par toute autre méthode, cette discussion étant généralement très compliquée.

176. Méthode des multiplicateurs de Lagrange. — L'élimination des différentielles entre les équations (2) du numéro précédent se fait généralement de la manière la plus commode par la méthode des multiplicateurs, qui introduit plus de symétrie dans les calculs. On multiplie respectivement les équations (2), hormis la première, par des facteurs à déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, puis on additionne toutes ces équations (2) membre à membre. On trouve un résultat de la forme

$$A dx + B dy + \cdots + P du + \cdots = 0.$$

On imagine que l'on dispose des m facteurs arbitrairs λ de manière à faire évanouir dans cette équation les coefficients P,... des m différentielles $du, \ldots$ qui ne sont pas indépendantes. Alors il ne reste plus dans l'équation que les différentielles arbitraires, de sorte que les autres coefficients doivent également s'annuler. On est ainsi conduit à annuler les coefficients A, B,... P,... de toutes les différentielles, ce qui fournit $m + n$ équations :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial u} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial u} + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Les systèmes (1) et (3) renferment en tout $2m + n$ équations, qui serviront à déterminer les valeurs des $m + n$ variables $x, y, \ldots u, \ldots$ et des m facteurs inconnus $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$.

Remarque I. Le système (3) est le même que celui que l'on

forme en cherchant les extrémés libres de la fonction Φ, définie par l'équation

$$\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots \lambda_m F_m,$$

et dans laquelle on considère $x, y, \ldots u, \ldots$ comme des variables indépendantes et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ comme des constantes.

Remarque II. — La considération de la fonction Φ est aussi commode pour la discussion du signe de d^2f. En effet, l'équation $\Phi = f$ est une conséquence des équations (1) ; on a, en vertu des mêmes équations, $d^2f = d^2\Phi$ et aussi

$$d^2\Phi = d^2f + \lambda_1 d^2F_1 + \cdots + \lambda_m d^2F_m.$$

Remplaçons dans le second membre les différentielles secondes de f, $F_1, \ldots$ par leurs expressions générales telles que

$$d^2F = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \cdots + \frac{\partial}{\partial u} du + \cdots\right)^2 F + \frac{\partial F}{\partial u} d^2u + \cdots$$

Les termes en d^2u, $d^2v, \ldots$ disparaîtront en vertu des équations (3) et il restera

$$d^2f = d^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \cdots + \frac{\partial}{\partial u} du + \cdots\right)^2 \Phi.$$

On peut donc remplacer d^2f par $d^2\Phi$, qui se calcule comme si les variables étaient indépendantes et les λ constants. Bien entendu, pour la discution du signe de d^2f, il faudra peut-être encore éliminer les différentielles premières $du, \ldots$ des variables dépendantes, mais l'introduction de Φ a eu pour avantage d'éliminer immédiatement leurs différentielles secondes.

Exercices.

1. Trouver la route que doit suivre un rayon lumineux pour aller d'un point A à un point B dans le moindre temps possible. Ces points sont situés dans deux milieux distincts où les vitesses de la lumière sont respectivement u et v. On suppose plane la surface de séparation des deux milieux.

R. On voit de suite que cette route est dans le plan mené par A et B normalement à la surface de séparation. Soient a et b les distances de A et de B au plan de séparation, x et y les angles respectifs du rayon incident et du rayon réfracté avec la normale à ce plan. La fonction qui doit être minimée est

$$f(x, y) = \frac{a}{u \cos x} + \frac{b}{v \cos y}$$

avec la condition

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{tg} y = \text{const.}$$

On trouve $\sin x : \sin y = u : v$.

2. Plus courte distance d'un point à un plan.

3. Triangle de périmètre minimé inscrit dans un triangle donné.
R. C'est le triangle formé en joignant les pieds des trois hauteurs.

4. Déterminer les axes de la section faite dans un ellipsoïde par un plan.
R. Soient, en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad lx + my + nz = 0,$$

les équations de l'ellipsoïde et du plan. On doit extrémer la fonction

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

les variables étant liées par les équations précédentes.
La méthode des multiplicateurs donne

$$x + \lambda_1 \frac{x}{a_2} + \lambda_2 l = 0, \quad y + \lambda_1 \frac{y}{b_2} + \lambda_2 m = 0, \quad z + \lambda_1 \frac{z}{c^2} + \lambda_2 n = 0.$$

On en tire

$$\lambda_1 = -r^2, \qquad \lambda^2 = \left[\left(\frac{al}{a^2 - r^2}\right)^2 + \left(\frac{bm}{b^2 - r^2}\right)^2 + \left(\frac{cn}{c^2 - r^2}\right)^2\right].$$

Les carrés r^2 des demi-axes de la section sont les deux racines de l'équation

$$\frac{a^2 l^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 m^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 n^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

5. Même problème pour la *surface d'élasticité*

$$(x^2 + y^2 + z^2) = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2.$$

R. On trouve, pour déterminer les extrémés de r, l'équation

$$\frac{l^2}{r^2 - a^2} + \frac{m^2}{r^2 - b^2} + \frac{n^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

6. Déterminer les axes de la conique qui a pour équation en coordonnées obliques

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 = H.$$

R. Soit θ l'angle des axes. Il faut extrémer

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2\,xy \cos \theta.$$

La méthode des multiplicateurs donne

$$Ax + By = \lambda\,(x + y \cos \theta), \qquad Bx + Cy = \lambda\,(y + x \cos \theta).$$

D'où $\lambda r^2 = H$ et les valeurs de λ sont les racines de l'équation

$$(A - \lambda)(C - \lambda) = (B - \lambda \cos \theta)^2.$$

7. Problème analogue pour une surface du second degré.

8. Partager le nombre positif a en trois parties x, y, z, telles que $f = x^m y^n z^p$ soit maximée (m, n, p étant positifs).

R. On trouve facilement $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{a}{m+n+p}$. Le caractère d'un maximé se vérifie immédiatement car on a, pour ces valeurs de x, y, z,

$$d^2 f = -\left(\frac{m dx^2}{x^2} + \frac{n dy^2}{y^2} + \frac{p dz^2}{z^2}\right) f < 0.$$

§ 4. Changement de variables.

Il arrive fréquemment que l'on doive transformer les expressions différentielles en substituant de nouvelles variables aux anciennes. Ces calculs se font par l'application des règles générales de différentiation. Mais il peut être utile d'indiquer un procédé systématique pour effectuer les transformations les plus usuelles. Nous commencerons par résoudre une question préalable.

177. Dérivées successives d'une fonction par rapport à une autre fonction. — Jusqu'ici, pour calculer les dérivées successives de y par rapport à x, on a considéré x comme la variable indépendante et supposé dx constant, auquel cas,

$$D_x y = \frac{dy}{dx}, \qquad D_x^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots \qquad D_x^n y = \frac{d^n y}{dx^n}, \ldots$$

La première formule subsiste, même si x est une fonction (n° 95, V), mais il n'en est plus ainsi des suivantes qui supposent dx constant (n° 117). Pour calculer les dérivées successives de y par rapport à x au moyen des différentielles successives de ces deux variables, sans choisir x comme variable indépendante, il suffit d'appliquer successivement la première formule en observant les règles générales de différentiation. On trouve de proche en proche

$$(1)\quad \begin{cases} D_x y = \dfrac{dy}{dx}, \\ D_x^2 y = \dfrac{d.\,D_x y}{dx} = \dfrac{d\dfrac{dy}{dy}}{dx} = \dfrac{dxd^2y - dy\,d^2x}{dx^3}, \\ D_x^3 y = \dfrac{d.D_x^2 y}{dx} = \dfrac{dx(dxd^3y - dyd^3x) - 3d^2x(dxd^2y - dyd^2x)}{dx^5}. \end{cases}$$

et ainsi de suite. La loi générale est assez compliquée.

Soit maintenant t la variable indépendante. Proposons-nous d'exprimer les dérivées successives de y par rapport à x au moyen des dérivées successives de x et de y par rapport à t. En désignant par des accents les dérivées par rapport à t, on a

$$dx = x'dt, \quad d^2x = x''dt^2, \quad d^3x = x'''dt^3, \ldots$$
$$dy = y'dt, \quad d^2y = y''dt^2, \quad d^3y = y'''dt^3, \ldots$$

Substituons ces valeurs dans les formules (1), dt disparait du résultat, car les seconds membres sont homogènes et de degré 0 par rapport aux indices de différentiation. Il vient donc

$$(2)\quad \begin{cases} D_x y = \dfrac{y'}{x'}, \\ D_x^2 y = \dfrac{x'y'' - y'x''}{x'^3}, \\ D_x^3 y = \dfrac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{x'^5}, \text{ etc.} \end{cases}$$

178. Fonctions d'une seule variable. — Soient y une fonction de la variable indépendante x, et

$$(3)\qquad V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$$

une expression renfermant x, y et les dérivées de y par rapport à x jusqu'à un certain ordre. La transformation de cette expression par un changement de variable donne lieu à deux problèmes principaux :

1° *Changement de la variable indépendante.* Etant donnée une relation

$$(4)\qquad x = \varphi(t)$$

entre x et une nouvelle variable t, on choisit t comme variable indépendante au lieu de x. Il s'agit d'introduire t au lieu de x

dans V et, par suite, les dérivées de y par rapport à t au lieu des dérivées par rapport à x.

Ce problème peut être résolu au moyen des formules (2), où l'on trouve les valeurs des dérivées de y par rapport à x en fonctions des dérivées x', x''..., y', y''... de x et de y par rapport à t. On substitue ces valeurs dans V, et l'on remplace x, x', x''... par leurs expressions $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$,... tirées de (4), le problème sera résolu.

2° Le deuxième probléme est celui du *changement de toutes les variables*. Etant données deux équations

$$F(x, y, t, u) = 0, \qquad F_1(x, y, t, u) = 0,$$

entre x, y et deux nouvelles variables t, u, on demande d'exprimer V au moyen de t, u et des dérivées de u par rapport à t. Dérivons totalement les équations données par rapport à t, en considérant x, y, u comme des fonctions de t prise comme variable indépendante. Nous en tirons de proche en proche (n° 173) les valeurs des dérivées x', y', x'', y'',... de x et y par rapport à t en fonction de x, y, u, u', u'',... Substituons ces valeurs dans les équations (2), nous obtenons des expressions de $D_x y$, $D_x^2 y$,... que nous porterons dans V. Il ne restera plus qu'à éliminer x, y au moyen des équations $F = 0$ et $F_1 = 0$. Le problème sera résolu.

Ce cas se présente lorsque, une grandeur géométrique étant exprimée en coordonnées rectangulaires x et y par une expression telle que V, on veut la transformer en coordonnées polaires r et θ par les relations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Les accents désignant des dérivées par rapport à θ, on a

$$x' = r'\cos\theta - r\sin\theta, \qquad y' = r'\sin\theta + r\cos\theta,$$
$$x'' = r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta, \quad y'' = r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta$$

et les relations (2) deviennent

$$D_x y = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}, \qquad D_x^2 y = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3}, \quad \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs de x, y, $D_x y$,... dans V, on aura résolu la question.

179. Fonctions de plusieurs variables. — Nous supposerons, pour abréger, qu'il n'y ait que deux variables indépendantes, mais la méthode sera générale. Soit H une fonction des deux variables indépendantes x et y, et

$$V = f\left(x, y, H, \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \ldots\right) \tag{5}$$

une expression renfermant les variables et les dérivées partielles de H jusqu'à un certain ordre. Comme dans le cas précédent, la transformation de cette expression par un changement de variables donne lieu à deux problèmes principaux :

1° *Changement des variables indépendantes.* On donne deux relations entre x, y et deux nouvelles variables u, v :

$$F_1(x, y, u, v) = 0, \qquad F_2(x, y, u, v) = 0. \tag{6}$$

On choisit u, v comme variables indépendantes au lieu de x, y et l'on demande d'introduire u, v au lieu de x, y dans V et, par suite, les dérivées de H par rapport à u, v, au lieu de celles par rapport à x, y.

Il faut d'abord exprimer les dérivées partielles de H par rapport à x, y en fonction des dérivées par rapport à u, v. On y arrive comme il suit : Prenant x, y comme variables indépendantes, on différentie successivement les équations données $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$. On en déduit, de proche en proche (n° 173), les valeurs de du, dv, d^2u, d^2v,.,. en fonction de x, y, u, v, dx et dy. Portant ces valeurs dans les expressions suivantes des différentielles de H (n° 156) :

$$\left\{\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial u}du + \frac{\partial H}{\partial v}dv, \\ d^2H &= \left(\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right)^2 H + \frac{\partial H}{\partial u}d^2u + \frac{\partial H}{\partial v}d^2v, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{7}$$

on trouve, en réduisant,

$$\left\{\begin{aligned} dH &= p\,dx + q\,dy, \\ d^2H &= r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{8}$$

où $p, q, r, s, t,\ldots$ renferment x, y, u, v et les dérivées de H par rapport à u, v. Les variables x, y étant indépendantes, on en conclut (n° 157)

$$\frac{\partial H}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = q \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = r, \quad \text{etc.}$$

Ce sont les expressions des dérivées partielles qu'on se proposait d'obtenir. On porte ces valeurs dans V et on élimine, s'il y a lieu, x, y par les équations (6). Le problème sera résolu.

2° *Changement de toutes les variables.* On donne trois relations :

$$(9) \quad F_1(x, y, H, u, v, K) = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0,$$

entre x, y, H et trois nouvelles variables u, v, K. On demande d'exprimer V en fonction de u, v, K et des dérivées partielles de K considérée comme fonction de u, v.

Choisissant x, y comme variables indépendantes, on différentie totalement les trois équations données et on en tire, de proche en proche, les valeurs des différentielles successives de u, v, K en fonctions des différentielles de x, y, H. Les différentielles de K en particulier, sont de la forme

$$(10) \quad \begin{cases} dK = A\,dx + B\,dy + C\,dH, \\ d^2K = D\,dx^2 + \cdots + E\,dH^2 + F\,d^2H, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où A, B, C, D,... sont des fonctions connues de x, y, H, u, v, K.

D'autre part, portons les valeurs analogues trouvées pour du, dv, d^2u, d^2v,... dans les formules générales :

$$(11) \quad \begin{cases} dK = \dfrac{\partial K}{\partial u} du + \dfrac{\partial K}{\partial v} dv, \\ d^2K = \left(\dfrac{\partial}{\partial u} du + \dfrac{\partial}{\partial v} dv\right)^2 K + \dfrac{\partial K}{\partial u} d^2u + \dfrac{\partial K}{\partial v} d^2v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

il viendra, en réduisant,

$$(12) \quad \begin{cases} dK = M\,dx + N\,dy + P\,dH, \\ d^2K = Q\,dx^2 + \cdots + R\,dH^2 + S\,d^2H, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où M, N, P, Q,... contiennent linéairement les dérivées partielles de K par rapport à u,v.

En égalant les valeurs (10) et (12) de dK, d^2K,... il vient

$$(M - A)\,dx + (N - B)\,dy + (P - C)\,dH = 0,$$
$$(Q - D)\,dx^2 + \cdots + (R - E)\,dH^2 + (S - F)\,d^2H = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La première équation donne $d\mathrm{H}$. Portant cette valeur dans la suivante, on en tire $d^2\mathrm{H}$, et ainsi de suite. Les résultats sont de la forme

$$d\mathrm{H} = p\,dx + q\,dy,$$
$$d^2\mathrm{H} = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où $p, q, r, \ldots$ sont des fonctions rationnelles connues des dérivées de K par rapport à u et v. On conclut de ces relations

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} = q, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x^2} = r, \quad \text{etc.}$$

On portera ces valeurs dans V. On éliminera, s'il y a lieu, x, y, H par les relations $\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_2 = \mathrm{F}_3 = 0$. Le problème sera résolu.

180. Premier exemple. — *Soit* H *une fonction de deux variables*, x, y. *On demande de transformer l'expression*

$$\mathrm{V} = \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial y^2} \tag{13}$$

par les formules de transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires dans le plan :

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \tag{14}$$

C'est le premier des deux problèmes résolus au numéro précédent. Suivant la méthode générale, on différentie les équations données et il vient

$$dx = (\cos v)\,du - (\sin v)\,u\,dv,$$
$$dy = (\sin v)\,du + (\cos v)\,u\,dv.$$

On en tire

$$\left\{\begin{aligned} du &= \cos v\,dx + \sin v\,dy \\ u\,dv &= -\sin v\,dx + \cos v\,dy \end{aligned}\right. \tag{15}$$

et, en différentiant de nouveau,

$$d^2u = (-\sin v\,dx + \cos v\,dy)\,dv = u\,dv^2$$
$$du\,dv + u\,d^2v = -(\cos v\,dx + \sin v\,dy)\,dv = -du\,dv.$$

On a donc

$$d^2u = u\,dv^2, \qquad d^2v = -2\,\frac{du\,dv}{u}.$$

Portant ces valeurs dans le seconde formule (7), elle devient

$$d^2\mathrm{H} = \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u^2}\,du^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{u}\,\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}\right) du\,dv + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial v^2} + u\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\right) d^2v.$$

Il reste à remplacer du et dv par leurs valeurs (15) et à ordonner par rapport à dx et dy. La quantité V sera la somme des coefficients de

dx^2 et dy^2. Or la somme de ces coefficients est égale à 1 dans le développement de du^2, à 0 dans celui de $du\,dv$ et à $1 : u^2$ dans celui de dv^2. On a donc immédiatement

$$V = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial u}. \tag{16}$$

181. Deuxième exemple. — *Soit* H *une fonction de trois variables* x, y, z. *Transformer l'expression*

$$V = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \tag{17}$$

par les formules de transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires dans l'espace :

$$x = u \sin w \cos v, \quad y = u \sin w \sin v, \quad z = u \cos w. \tag{18}$$

On simplifie le problème en faisant la transformation en deux fois. Posons d'abord $u \sin w = u_1$ et éliminons x, y par les relations

$$x = u_1 \cos v, \qquad y = u_1 \sin v. \tag{19}$$

On aura, par la solution du problème précédent,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} + \frac{1}{u_1^2}\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial H}{\partial u_1}. \tag{20}$$

Eliminons ensuite z et u_1 par les relations

$$z = u \cos w, \qquad u_1 = u \sin w. \tag{21}$$

On aura

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{1}{n^2}\frac{\partial^2 H}{\partial w^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial u}. \tag{22}$$

Ajoutant membre à membre les équations (20) et (22), il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} &+ \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 H}{\partial w^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial H}{\partial u} \\ &+ \frac{1}{u_1^2}\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial H}{\partial u_1}\end{aligned} \tag{23}$$

Il faut encore exprimer $\dfrac{\partial H}{\partial u_1}$ au moyen de u, w par les relations (21).

Pour cela, on forme les valeurs suivantes, analogues aux valeurs (15):

$$du = \cos w\, dz + \sin w\, du_1, \qquad u\,dw = -\sin w\, dz + \cos w\, du_1\,;$$

on les substitue dans l'expression

$$dH = \frac{\partial H}{\partial u}\, du + \frac{\partial H}{\partial w}\, dw$$

et, en cherchant le coefficient de du_1, on trouve

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{\partial H}{\partial u} \sin w + \frac{1}{u} \frac{\partial H}{\partial w} \cos w.$$

Portant cette valeur dans (**23**), on a finalement

$$(24)\quad V = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{2}{u}\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial w^2} + \frac{\cos w}{\sin w}\frac{\partial H}{\partial w}\right) + \frac{1}{u^2 \sin^2 w}\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}.$$

18. Transformation de Legendre. — Dans certains cas, les relations qui lient les nouvelles variables aux anciennes renferment aussi leurs dérivées. La transformation de Legendre en est un exemple remarquable. Soit z une fonction de deux variables indépendantes x, y. On pose

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

On suppose qu'il n'y ait pas de relation entre p et q et l'on se propose d'exprimer les dérivées secondes de z par rapport à x et à y en prenant p, q comme nouvelles variables indépendantes, et, comme nouvelle fonction, la variable u définie par l'équation

$$(1)\qquad u = px + qy - z.$$

En différentiant cette relation et en observant que l'on a

$$(2)\qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

il vient

$$du = x\,dp + y\,dq.$$

On en conclut, p et q étant indépendants par hypothèse,

$$\frac{\partial u}{\partial p} = x, \qquad \frac{\partial u}{\partial q} = y,$$

puis, en différentiant ces deux relations,

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}dp + \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dq = dx, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dp + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}dq = dy.$$

Les différentielles dx et dy étant arbitraires dans ces deux équations, on en conclut que le déterminant

$$(5)\qquad H = \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2$$

est différent de zéro par hypothèse. Par suite, ces deux équations peuvent se résoudre par rapport à dp et dq et il vient

$$dp = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}dx - \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dy\right), \qquad dq = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}dy - \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dx\right).$$

Portant ces valeurs dans la différentielle totale

$$d^2z = dp\,dx + dq\,dy,$$

obtenue en différentiant l'équation (2) et en considérant x, y comme les variables indépendantes, dx et dy comme constants, on trouve enfin

$$d^2z = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}dx^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}dy^2\right].$$

Cette formule résout la question. On en conclut

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{H}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{H}\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{H}\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}.$$

Exercices.

1. Exprimer les dérivées de y par rapport à x en fonction des dérivées x', x'',... de x par rapport à y.

R. $D_x y = \frac{1}{x'}$, $\quad D_x^2 y = -\frac{x''}{x'^3}$, $\quad D_x^3 y = \frac{3x''^2 - x'x''}{x'^5}$, etc.

2. Transformer, en prenant y comme variable indépendante, l'équation

$$\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

R. On trouve $x''' = 0$.

3. Transformer, par la relation $x = \cos t$, l'équation

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0.$$

R. $y'' + a^2y = 0$.

4. Transformer, par la relation $x = \sqrt{1 - t^2}$, l'équation

$$(x - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

R. L'équation conserve la même forme, t prenant seulement la place de x. Donc, si $y = \varphi(x)$ est une première solution de l'équation, $y = \varphi\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$ en est une autre.

5. Montrer que l'on a, par les relations $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

6. Transformer, par les relations $u = xy$, $v = 1 : y$, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + (y - y^3)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0.$$

R. L'équation conserve la même forme, u prenant seulement la place de x et v celle de y. Donc, si $z = \varphi(x, y)$ est une première solution, $z = \varphi\left(xy.\frac{1}{y}\right)$ en est une autre.

7. Soit H une fonction des trois variables x, y, z. Transformer les deux expressions

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2, \qquad \Delta_2 = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2},$$

par la substitution orthogonale

$$\begin{array}{lll} x = au + bv + cw, & a^2 + b^2 + c^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 0, \\ y = a'u + b'v + c'w, & a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ z = a''u + b''v + c''w, & a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0. \end{array}$$

R. Les expressions Δ_1 et Δ_2 conservent la même forme, u, v, w remplaçant x, y, z.

CHAPITRE V.

Intégrales indéfinies. Méthodes classiques d'intégration.

---

§ 1. Procédés généraux d'intégration.

183. Problème des quadratures. — Le calcul intégral est l'inverse du calcul différentiel. Il a pour objet de remonter des relations données entre les variables et leurs différentielles aux relations qui existent entre les variables seulement.

La première question traitée dans le calcul différentiel était de trouver la dérivée ou la différentielle d'une fonction donnée $f(x)$. Le calcul intégral doit débuter par la question inverse :

Une fonction $f(x)$ étant donnée, trouver toutes les fonctions qui ont $f(x)$ pour dérivée ou, ce qui revient au même, $f(x)\,dx$ pour différentielle,

Ce problème a reçu le nom de *Problème des quadratures*, d'après le problème de géométrie auquel il est étroitement lié et que nous étudierons plus loin. On doit d'abord se demander s'il existe toujours une fonction ayant pour dérivée $f(x)$, ou si le produit de $f(x)$ par dx constitue toujours une différentielle. Nous prouverons bientôt, en exposant la théorie des intégrales définies, qu'il en est bien ainsi dans tout intervalle où la fonction $f(x)$ est continue. Nous admettrons provisoirement ce résultat dans le chapitre actuel et nous supposerons une fois pour toutes que la condition de continuité est réalisée dans les théorèmes généraux que nous allons énoncer.

184. Fonction primitive. Intégrale indéfinie. — Une fonction $F(x)$ qui a $f(x)$ pour dérivée ou $f(x)\,dx$ pour différentielle s'appelle une *fonction primitive de* $f(x)$ ou une *intégrale de* $f(x)\,dx$. On dit aussi une *intégrale de* $f(x)$.

La connaissance d'une seule fonction primitive de $f(x)$ four-

nit la solution complète du problème des quadratures. On a, en effet, le théorème suivant :

Soit $f(x)$ une fonction continue ; si $F(x)$ a pour dérivée $f(x)$ dans un intervalle (a, b), l'expression

$$F(x) + C,$$

où C est une constante arbitraire, représente, dans cet intervalle, toutes les fonctions qui ont pour dérivée $f(x)$.

En effet $F(x) + C$ a pour dérivée $f(x)$; et, réciproquement, toute fonction qui a $f(x)$ pour dérivée, ayant la même dérivée que $F(x)$, ne diffère de $F(x)$ que par une constante (n° 105).

D'après cela, la fonction $F(x) + C$ où C est une constante arbitraire, est la fonction la plus générale qui ait $f(x)$ pour dérivée et $f(x)\,dx$ pour différentielle. Cette fonction se nomme l'*intégrale indéfinie* ou *générale de $f(x)\,dx$* et se représente par la notation

$$\int f(x)\,dx,$$

qui comprend implicitement la constante arbitraire.

185. Propriétés des intégrales indéfinies qui résultent immédiatement de leur définition. — 1° Par définition de l'intégrale indéfinie, on a la relation

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Donc les signes d et $\int$ se détruisent quand le signe d est placé devant le second.

Pareillement, par définition,

$$D\int f(x)\,dx = f(x).$$

2° $F(x)$ étant une intégrale de $d\,F(x)$, on a

$$\int d\,F(x) = F(x) + C.$$

Donc les signes d et $\int$ se détruisent encore devant $F(x)$ quand le signe d est le second, mais il faut ajouter une constante arbitraire à la fonction $F(x)$.

3° *Un facteur constant peut être mis hors du signe d'intégration*, c'est-à-dire que, si a est constant,

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

En effet, les deux membres ont $af(x)$ pour dérivée. Donc ils ne peuvent différer que par une constante. Mais, comme ils comprennent tous deux une constante arbitraire, ils ont le même sens.

4° *L'intégrale indéfinie d'une somme de différentielles est égale à la somme des intégrales de chacune des différentielles.* Ce théorème est exprimé par la formule

$$\int (u + v - w + \cdots)\, dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx + \cdots$$

En effet, les deux membres, ayant la même dérivée $(u + v - w + \cdots)$, ne pourraient différer que par une constante ; mais, comme leur définition comporte une constante arbitraire, ils ont la même signification. Il est vrai qu'il y a en apparence plusieurs constantes arbitraires dans le second membre, car chaque terme en comporte une à lui seul, mais, comme ces constantes s'ajoutent entre elles, elles se réduisent en réalité à une seule distincte.

186. Intégration immédiate. — Les résultats trouvés dans le calcul différentiel permettent d'écrire immédiatement les intégrales de quelques différentielles simples. En effet, lorsque, dans l'expression à intégrer, on reconnaît la différentielle d'une fonction connue $F(x)$, il suffit d'ajouter à celle-ci une constante arbitraire pour obtenir l'intégrale. Cette remarque, appliquée au tableau des différentielles des fonctions élémentaires, conduit à former le tableau suivant, qu'il importe de bien posséder par cœur :

$$\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \qquad \int \frac{dx}{x} = \operatorname{Log} x + C,$$

$$\int A^x\, dx = \frac{A^x}{\operatorname{Log} A} + C, \qquad \int e^x\, dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,cot} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + C = -\operatorname{arc\,cos} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C = -\operatorname{arc\,cosec} x + C.$$

Nous allons indiquer maintenant les principaux artifices à l'aide desquels on peut ramener l'intégration des différentielles plus compliquées aux formules du tableau précédent. Ces artifices sont au nombre de trois : 1° Décomposition en éléments simples ; 2° changement de variables ; 3° intégration par parties.

187. Intégration par décomposition. — C'est l'application de la propriété énoncée au n° 185 (4°). Si l'on peut décomposer la différentielle $f(x)\,dx$ en une somme de termes que l'on sait intégrer, en faisant la somme des intégrales de chaque terme, on obtiendra l'intégrale de $f(x)\,dx$.

Cette méthode s'applique à un polynome :

$$\int (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Elle s'applique aussi à d'autres fonctions, par exemple,

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \cot x + C.$$

188. Intégration par substitution. — Cette méthode résulte de la règle de différentiation des fonctions de fonctions. Proposons-nous d'exprimer $\int f(x)\,dx$ à l'aide d'une nouvelle variable t, liée à x par l'équation

$$x = \varphi(t).$$

Je dis qu'il suffit de faire la substitution sous le signe $\int$, c'est-à-dire que l'on a, $\varphi(t)$ ayant une dérivée continue $\varphi'(t)$,

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

En effet, les deux membres, ayant la même différentielle

$$f(x)\,dx = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

ne peuvent différer que par une constante, mais, comme ils comportent une constante arbitraire, ils ont le même sens.

On voit que, si l'on choisit la substitution de manière à ramener $f(x)\,dx$ à une forme que l'on sait intégrer, on obtiendra l'intégrale en fonction de t. Pour l'exprimer en fonction de x, il suffira d'y remplacer t par sa valeur tirée de $x = \varphi(t)$.

On obtient ainsi, par les substitutions $x = \frac{t}{a}$ et $x = \frac{at}{b}$,

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\int e^t\,dt = \frac{e^t}{a} + C = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{ab}\,\text{arc tg}\, t + C = \frac{1}{ab}\,\text{arc tg}\,\frac{bx}{a} + C.$$

De même, par substitution $x - p = qt$, on obtient l'intégrale, que nous rencontrons bientôt (n° 196) :

$$\int \frac{q\,dx}{(x-p)^2 + q^2} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \text{arc tg}\, t + C = \text{arc tg}\,\frac{x-p}{q} + C.$$

Remarque. — Dans les cas simples, il est inutile d'introduire de nouvelles lettres et la substitution se fait mentalement. Ainsi on écrit, sans passer tout au long par la substitution $\varphi(x) = t$,

$$\int \frac{d.\,\varphi(x)}{\varphi(x)} = \text{Log}\,\varphi(x) + C.$$

En particulier,

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b}\int \frac{d(a + bx)}{a + bx} = \frac{1}{b}\,\text{Log}\,(a + bx) + C,$$

$$\int \frac{2\,(x-p)\,dx}{(x-p)^2 + q^2} = \int \frac{d\,[(x-p)^2 + q^2]}{(x-p)^2 + q^2} = \text{Log}\,[(x-p)^2 + q^2] + C.$$

189. Intégration par parties. — Cette méthode est une conséquence de la règle pour différentier un produit. Soient u et v deux fonctions de x, on a

$$d\,uv = u\,dv + v\,du, \qquad \text{d'où} \qquad u\,dv = d.uv - v\,du.$$

Il vient donc

$$\int u\,dv = \int d.uv - \int v\,du.$$

Mais le premier terme du second membre est égal à $uv + C$; et, comme cette constante C peut être comprise dans le second terme, il reste simplement

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Cette formule renferme la *règle d'intégration par parties.* Elle ramène l'intégration de $u\,dv$ à celle de $v\,du$, qui peut être plus facile.

Soit, par exemple, à intégrer $xe^x dx$. On pose $x = u$ et $e^x = v$ (d'où $e^x dx = dv$). Il vient alors

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

190. Combinaison de diverses méthodes. — On doit souvent employer successivement plusieurs des méthodes précédentes pour effectuer complètement l'intégration. En voici quelques exemples :

1°) En intégrant d'abord par parties et ensuite par substitution, on trouve

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\operatorname{Log}(1+x^2)}{2} + C.$$

2°) On trouve, en intégrant d'abord par décomposition et ensuite par substitution,

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+bx} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a-bx} = \frac{1}{2ab} \operatorname{Log} \frac{a+bx}{a-bx} + C.$$

3°) Par la substitution $x = a \sin \varphi$, il vient d'abord

$$\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \int \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Ensuite, en effectuant la décomposition par la formule

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2},$$

il vient

$$a^2 \int \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}\int d\varphi + \frac{a^2}{2}\int \cos 2\varphi d\varphi$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right) + C.$$

Enfin, en revenant à la variable x, on trouve

$$\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$$

191. Formules de réduction. — Pour fixer les idées, considérons un exemple. Soit à intégrer $x^n e^{ax} dx$. Appliquons la formule d'intégration par parties, en regardant $e^{ax}dx$ comme une différentielle dv (n° 189) ; il vient

$$\int x^n e^{ax} dx = x^n \frac{e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax} dx.$$

Cette formule ramène l'intégrale du premier membre à une intégrale de même forme, mais où l'exposant n est abaissé d'une unité. Si n est entier et positif, cette formule s'applique de proche en proche et change successivement n en $(n-1)$, $(n-2)$,... jusqu'à ce que l'exposant de x soit abaissé à zéro. Il n'y a plus alors qu'à intégrer $e^{ax}dx$, ce qui est immédiat. Une formule telle que la précédente, qui s'applique de proche en proche et permet de simplifier de plus en plus l'intégrale proposée jusqu'à ce qu'on sache l'intégrer, est une *formule de réduction*. Nous en rencontrerons de nombreux exemples.

192. Dérivation par rapport à un paramètre. — Soit $f(x, a)$ une fonction de la variable x et du paramètre a ; supposons qu'on ait obtenu, en considérant a comme une constante indéterminée,

$$\int f(x, a)\, dx = \mathrm{F}(x, a) + \mathrm{C}. \tag{1}$$

Je dis que l'on peut en déduire, en dérivant par rapport à a sous le signe $\int$,

$$\int \mathrm{D}_a f(x, a)\, dx = \mathrm{D}_a \mathrm{F}(x, a) + \mathrm{C}. \tag{2}$$

Cette règle suppose seulement que les conditions de continuité des dérivées partielles de F qui assurent l'égalité $\mathrm{F}''_{xa} = \mathrm{F}''_{ax}$ soient vérifiées (n° 153).

En effet, les dérivées par rapport à la variable x des deux membres de l'équation (2) sont respectivement

$$\mathrm{D}_a f(x, a) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_x \mathrm{D}_a \mathrm{F}(x, a).$$

Ces deux dérivées sont égales, car on peut intervertir par hypothèse D_x et D_a, et l'on a

$$\mathrm{D}_x . \mathrm{D}_a \mathrm{F}(x, a) = \mathrm{D}_a . \mathrm{D}_x \mathrm{F}(x, a) = \mathrm{D}_a f(x, a).$$

Les deux membres de l'équation (2), ayant même dérivée, ne diffèrent que par une constante par rapport à x. Mais, comme ils comprennent tous deux une constante arbitraire, ils ont exactement le même sens.

Le résultat précédent peut être généralisé. En dérivant successivement l'équation (2) par rapport à a et en admettant toujours que les conditions de continuité des dérivées partielles

considérées restent vérifiées, on peut aussi conclure de l'équation (1) à la suivante

$$(3) \qquad \int D_a^n f(x, a)\, dx = D_a^n F(x, a) + C.$$

La règle précédente fournit un procédé commode d'intégration. En voici quelques exemples :

1° On a, pour a différent de 0,

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

Les conditions de continuité sont remplies. Dérivons n fois par rapport à a et observons que

$$D_a^n\, e^{ax} = x^n\, e^{ax},$$

nous obtiendrons, par la règle précédente,

$$(4) \qquad \int x^n\, e^{ax} dx = D_a^n \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

Cette intégrale a été obtenue autrement au n° 191.

2° Soit $a > 0$; on a, comme cas particulier d'un résultat précédent (n° 188),

$$\int \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ arc tg } \frac{x}{\sqrt{a}} + C.$$

Les conditions de continuité ont lieu. Dérivons $n - 1$ fois par rapport à a et observons que

$$D_a^{n-1} \frac{1}{x^2 + a} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x^2 + a)^n},$$

nous obtiendrons, après division par $(-1)^{n-1}(n-1)!$,

$$(5) \qquad \int \frac{dx}{(x^2 + a)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \text{ arc tg } \frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C.$$

Les formules (4) et (5) ramènent le calcul des intégrales proposées dans les premiers membres à des déterminations de dérivées et fournissent pour ces intégrales des expressions très condensées. Elles s'appliquent aussi bien au cas où l'on donne à a des valeurs particulières. La formule (5), par exemple, fournit un procédé pour calculer l'intégrale classique

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

Mais il faut effectuer les dérivations par rapport à a avant de faire $a = 1$. Toutefois le procédé le plus pratique pour calculer cette intégrale consiste dans l'emploi d'une *formule de réduction* indiquée plus loin (n° 206).

193. Variabilité de forme de l'intégrale. — 1° L'intégrale d'une même fonction peut s'écrire sous des formes en apparence différentes. Cela provient de ce que l'on peut séparer de la constante arbitraire une constante déterminée pour la réunir à la fonction intégrale. Ainsi, au lieu de l'expression habituelle arc tg $x + C$, on peut donner à l'intégrale les formes équivalentes :

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = (\text{arc tg}\, x - \text{arc tg}\, 1) + C = \text{arc tg}\, \frac{x-1}{1+x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = (\text{arc tg}\, x + \text{arc tg}\, 1) + C = \text{arc tg}\, \frac{x+1}{1-x} + C.$$

2° L'intégrale d'une même fonction peut se présenter sous des formes analytiques nécessairement différentes lorsque x varie dans des intervalles différents. Cette remarque s'applique à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x-a} = \text{Log}\,(x-a) + C.$$

Les quantités négatives n'ayant pas de logarithme réel, cette formule suppose $x > a$. Si $x < a$, on a

$$\int \frac{dx}{x-a} = -\int \frac{dx}{a-x} = \text{Log}\,(a-x) + C.$$

La forme de cette intégrale change donc suivant que x est $> a$ ou que x est $< a$. Afin de ne pas revenir à chaque instant sur cette distinction, nous conviendrons, une fois pour toutes, que, lorsque la valeur d'une intégrale renferme un logarithme, la quantité sous le signe logarithme sera prise en valeur absolue.

EXERCICES.

1° Par substitution :

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + C. \qquad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \text{Log tg}\, x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin}\frac{x}{a} + C. \qquad \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\operatorname{Log}\cos x + C. \qquad \int \frac{x\,dx}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{a^2} + C.$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} x\right) + C. \quad \int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

2° Par décomposition :

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x - x + C. \qquad \int dx\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + x\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2\sin^2 x} + 2\operatorname{Log}\operatorname{tg} x + C.$$

3° Par parties :

$$\int dx \arcsin x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\int \arcsin x \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\operatorname{tg} x + \operatorname{Log}\cos x + C.$$

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = \frac{e^{ax}(\sin x + a\cos x)}{1+a^2} + C.$$

4° Combinaison de diverses méthodes :

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg} x} = \frac{ax + b\operatorname{Log}(a\cos x + b\sin x)}{a^2+b^2} + C.$$

$$\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx = x\operatorname{tg} x + \operatorname{Log}\cos x - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x - \sin x)^2} = \operatorname{tg}\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right) + C.$$

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x\,dx = e^x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

$$\int \frac{\arcsin x\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-x^2) + C.$$

$$\int \frac{e^{a\operatorname{arc\,tg} x}\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{e^{a\operatorname{arc\,tg} x}(a+x)}{(1+a^2)\sqrt{1+x^2}} + C.$$

$$\int \frac{x^2\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2) + C.$$

N. B. Les trois derniers exercices se ramènent à d'autres qui précèdent, le premier par la substitution $x = \sin\varphi$, et les deux autres par la substitution $x = \operatorname{tg}\varphi$.

§ 2. Intégration des fractions rationnelles.

194. Décomposition de la fraction à intégrer. — Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx,$$

où $f(x)$ et $F(x)$ sont des polynomes entiers à coefficients réels. Quand $f(x)$ n'est pas de degré moindre que $F(x)$, on commence par effectuer la division. Le quotient $f(x) : F(x)$ se décompose en une partie entière et une fraction proprement dite. L'intégrale de la partie entière s'obtient immédiatement (n° 187) et l'on est ramené à intégrer une fraction proprement dite.

Supposons donc que l'expression à intégrer ait été débarrassée de sa partie entière et que $f(x) : F(x)$ soit une fraction proprement dite. Décomposons $F(x)$ en ses facteurs linéaires et soit

$$F(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots$$

On sait en déduire (n° 144) la formule de décomposition de $f(x) : F(x)$ en fractions simples. Soit :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} \\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} \\ & + \cdots \end{aligned} \right.$$

Sous cette forme, la fonction est préparée pour l'intégration. Nous rangeons les termes de la décomposition en deux catégories, comprenant : la première, les termes de la première colonne où le dénominateur est du premier degré ; la seconde, les autres termes où le dénominateur est de degré supérieur au premier. Il n'y a donc de termes de la seconde catégorie que si $F(x)$ a des racines multiples.

195. Intégration dans le cas des racines réelles. — Si toutes les racines $a, b, \ldots$ sont réelles, tous les termes de la décomposition sont immédiatement intégrables et l'on obtient la formule d'intégration

$$(2)\left\{\begin{aligned}\int\frac{f(x)}{F(x)}\,dx = A_1 \operatorname{Log}(x-a) - \frac{A_2}{(x-a)} - \dots - \frac{1}{\alpha-1}\frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha-1}}\\ + B_1 \operatorname{Log}(x-b) - \frac{B_2}{(x-b)} - \dots - \frac{1}{\beta-1}\frac{B_\beta}{(x-b)^{\beta-1}}\\ + \dots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\end{aligned}\right.$$

L'intégrale se compose d'une partie logarithmique et d'une partie rationnelle. La partie logarithmique est la somme des intégrales des termes de la première catégorie et la partie rationnelle la somme des intégrales des termes de la seconde.

196. Intégration dans le cas des racines imaginaires. — Si toutes les racines ne sont pas réelles, si, par exemple, les racines a, b,... sont imaginaires, les logarithmes qui figurent dans la formule (2) n'ont plus de sens, au moins jusqu'à présent, et nous verrons dans un instant par quoi il faut les remplacer. Mais il n'y a rien à changer aux autres termes qui sont rationnels. En effet, ce sont bien des fonctions primitives des termes correspondants de la formule (1), à condition de se placer au point de vue plus général de la différentiation des fonctions d'une variable complexe. D'ailleurs les imaginaires ne jouent qu'un rôle transitoire. Il suffit de faire la somme de ces termes pour rendre à l'intégrale la forme réelle. Nous allons montrer, en effet, que, x étant réel, les imaginaires se détruisent.

Les coefficients de $F(x)$ étant réels, à toute racine imaginaire a correspond une racine conjuguée b du même degré de multiplicité. La loi de formation des numérateurs de la formule de décomposition montre ensuite (n° 143) que les nombres complexes A_1 et B_1, A_2 et B_2,... sont conjugués deux à deux. Donc les fractions écrites sur la première ligne dans la formule (2), sont conjuguées des fractions écrites en dessous dans la seconde et, par conséquent, leur somme sera réelle.

Les termes de la seconde catégorie s'intègrent donc de la même façon que les racines a, b,... soient réelles ou imaginaires. Il n'en est plus ainsi pour les termes de la première catégorie. Lorsqu'il y en a d'imaginaires, il faut, avant d'intégrer, commencer par ajouter deux à deux les termes conjugués. Après quoi, l'intégration se fait de suite. Soient, en effet, a, b deux racines imaginaires conjuguées. On peut poser

$$a = p + qi, \qquad b = p - qi \qquad A_1 = M + Ni, \qquad B_1 = M - Ni,$$

p, q, M, N étant réels. Il vient alors, en ajoutant les termes conjugués, ce qui donne une somme réelle,

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}=\frac{M+Ni}{x-p-qi}+\frac{M-Ni}{x-p+qi}=2\frac{M(x-p)-qN}{(x-p)^2+q^2}.$$

$$\int\left(\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}\right)dx=M\int\frac{2(x-p)\,dx}{(x-p)^2+q^2}-2N\int\frac{q\,dx}{(x-p)^2+q^2}.$$

Ces intégrations ont été effectuées au n° 188. On trouve donc

$$(3)\int\left(\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}\right)dx=M\,\text{Log}\left[(x-p)^2+q^2\right]-2N\,\text{arc tg}\frac{x-p}{q}.$$

Remarque. — Si l'on observe que l'on a

$$\text{arc tg}\,\frac{x-p}{q}=\frac{\pi}{2}-\text{arc cot}\,\frac{x-p}{q}$$

et que $-(x-p):q$ est la cotangente de l'argument de $x-p-qi$ ou $x-a$, on voit que

$$\text{arc tg}\,\frac{x-p}{q}=\frac{\pi}{2}+\text{arg.}\,(x-a).$$

Comme on peut négliger le terme constant, on obtient pour l'intégration des termes conjugués la *formule pratique* suivante :

$$\int\left(\frac{M+Ni}{x-a}+\text{conj.}\right)dx=2M\,\text{Log}\,|\,x-a\,|-2N\,\text{arg}\,(x-a)$$
$$=\text{Log.}\,|\,x-a\,|^{2M}-\text{arg.}\,(x-a)^{2N}$$

Sous cette dernière forme, la formule a l'avantage de se prêter immédiatement à la réduction des termes semblables (une somme d'arguments étant égale à l'argument du produit des nombres).

De là, le théorème fondamental suivant :

197. Théorème. — *Toute fonction rationnelle s'intègre par les fonctions élémentaires. L'intégrale se compose généralement d'une partie transcendante et d'une partie rationnelle. La fraction à intégrer étant débarrassée de sa partie entière, la partie rationnelle provient de l'intégration des fractions simples de la seconde catégorie ; elle n'existe que si le dénominateur,* F(x), *a des racines multiples. La partie transcendante provient de l'intégration des fractions simples de la première catégorie ; elle se compose exclusivement de logarithmes si* F(x) *a toutes ses racines réelles ; elle peut, en outre, comprendre des arcs tangents (ou des arguments) s'il y a des racines imaginaires.*

198. Calcul direct de la partie rationnelle de l'intégrale. — La méthode exposée dans les numéros précédents suffit déjà pour effectuer *en pratique* l'intégration des fractions rationnelles. Mais, dans le cas où l'intégrale a une partie rationnelle, elle ne conduit pas aux calculs les plus simples. En effet, la détermination des numérateurs de la formule de décomposition est laborieuse dans le cas des racines multiples, surtout si elles sont imaginaires. La méthode que nous allons indiquer et dont le principe est dû à Hermite, permet de trouver directement la partie rationnelle de l'intégrale et d'achever le calcul par l'intégration d'une fraction rationnelle dont le dénominateur n'a plus que des racines simples. La décomposition se fait alors très simplement par la formule de Lagrange (n° 145). Cette méthode repose sur les considérations suivantes :

La somme des termes de la première catégorie dans la formule de décomposition (1) est une fraction proprement dite X : P, où

$$P = (x - a)(x - b)... \tag{4}$$

D'autre part, la somme des termes rationnels dans le second membre de la formule d'intégration (2) est une fraction proprement dite Y : Q, où

$$Q = (x - a)^{\alpha-1}(x - b)^{\beta-1}... \tag{5}$$

La formule d'intégration (2) devient ainsi

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \frac{Y}{Q} + \int \frac{X}{P} dx. \tag{6}$$

Dans cette formule, Y : Q et X : P sont des fractions proprement dites et le polynome P n'a que des racines simples. Je dis qu'*une décomposition qui possède ces caractères n'est possible que d'une seule manière.*

En effet, si l'on avait deux décompositions semblables, à savoir

$$\frac{Y}{Q} + \int \frac{X}{P} dx = \frac{Y_1}{Q_1} + \int \frac{X_1}{P_1} dx,$$

on en déduirait, par dérivation, la relation *équivalente*

$$\left(\frac{Y}{Q} - \frac{Y_1}{Q_1}\right)' = \frac{X_1}{P_1} - \frac{X}{P}.$$

Supposons qu'on remplace chacune de ces quatre fractions par une somme de fractions simples ; ces fractions simples se détruiront dans chaque membre séparément. En effet, comme la dérivée d'une fraction simple est une fraction de la seconde catégorie, le premier membre ne contient plus après la dérivation que des fractions de la seconde catégorie, tandis que le second n'en contient, par hypothèse, que de la première. Ces fractions doivent donc se détruire, car la décomposition en fractions simples est unique. On en conclut

$$\frac{Y}{Q}=\frac{Y_1}{Q_1}, \qquad \frac{X}{P}=\frac{X_1}{P_1},$$

c'est-à-dire que les deux décompositions sont les mêmes.

D'après cela, on peut déterminer directement $Y : Q$ et $X : P$ par la *méthode des coefficients indéterminés*. En effet, dérivons la formule (6) ; il vient

$$(7) \qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\left(\frac{Y}{Q}\right)'+\frac{X}{P}.$$

Le polynome Q, défini par la formule (5), est le plus grand commun diviseur entre F et sa dérivée et s'obtient par des calculs rationnels. Le polynome P, défini par la formule (4), est le quotient de F par Q et s'obtient aussi par des calculs rationnels. Les deux polynomes P et Q étant connus, on remplacera dans la formule (7) X et Y par des polynomes à coefficients indéterminés, de degré immédiatement inférieurs à ceux de P et de Q respectivement. En effectuant la dérivation indiquée et en multipliant la formule (7) par $F = PQ$, il viendra

$$f(x) = PY' - Y\frac{Q'P}{Q} + QX.$$

On voit de suite, $Q'P$ étant multiple de Q, que le second membre est un polynome de degré immédiatement inférieur à celui de F. En égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, on aura le nombre d'équations linéaires nécessaire et suffisant pour déterminer les coefficients inconnus de X et de Y.

Remarque. — La méthode précédente permet de trouver la partie rationnelle de l'intégrale sans résoudre l'équation $F(x)=0$.

Elle met immédiatement en lumière un fait important. C'est que la partie rationnelle de l'intégrale est rationnelle non seulement par rapport à la variable x, mais aussi par rapport aux coefficients de $f(x)$ et $F(x)$. Cette même remarque s'applique à la fraction $X : P$, qui reste à intégrer pour obtenir la partie transcendante de l'intégrale.

199. Exemple. — Soit à intégrer

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{(x^3 - 1)^2}.$$

Puisque $F(x)$ a des racines multiples, l'intégrale a une partie rationnelle. On la détermine par la méthode du numéro précédent. Le polynome Q de la théorie générale s'obtient en diminuant d'une unité l'exposant des facteurs simples de $F(x)$; il est égal à $x^3 - 1$. Donc P est aussi égal à $x^3 - 1$. Les polynomes inconnus X et Y sont, par suite, du second degré. On pose donc

$$\int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2} = \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 - 1} + \int \frac{ex^2 + fx + g}{x^3 - 1} dx ;$$

on dérive et on chasse les dénominateurs. Il vient

$$1 = (x^3 - 1)(2ax + b) - 3x^2(ax^2 + bx + c) + (x^3 - 1)(ex^2 + fx + g).$$

L'identification des deux membres fournit le système d'équations :

$$\begin{array}{lll} e = 0, & f - a = 0, & g - 2b = 0, \\ e + 3c = 0, & f + 2a = 0, & g + 2b = -1, \end{array}$$

d'où l'on tire les valeurs des coefficients inconnus :

$$\begin{array}{lll} e = 0, & a = 0, & b = -1 : 3. \\ c = 0, & f - 0, & g = -2 : 3. \end{array}$$

On a donc

$$(8) \qquad \int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2} = -\frac{1}{3} \frac{x}{x^3 - 1} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3 - 1}.$$

Le calcul de la partie transcendante de l'intégrale exige la détermination des racines de $x^3 - 1$, qui n'a plus que des racines simples a, b, c, ayant pour valeurs :

$$a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad b = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \qquad c = 1.$$

Les coefficients de la formule de décomposition :

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - 1}$$

se calculent par la règle du nº 145. La dérivée de $x^3 - 1$ étant $3x^2$, et a^3 étant égal à 1, on a de suite

$$A = \frac{1}{3a^2} = \frac{a}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{6} = M + Ni, \qquad B = M - Ni, \qquad C = \frac{1}{3}.$$

On trouve, par la formule (3),

$$\int \frac{dx}{x^3 - 1} = -\frac{1}{6} \operatorname{Log}(x^2 + x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \operatorname{Log}(x - 1) + C.$$

Portant cette valeur dans (8), il vient enfin

$$\int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2} = -\frac{1}{3} \frac{x}{x^3 - 1} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} \operatorname{Log}\left[\frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^2}\right] + C.$$

Exercices.

1. Démontrer les formules suivantes :

$$\int \frac{(x^2 - x + 2)\,dx}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{1}{3} \operatorname{Log} \frac{(x + 1)^2 (x - 2)}{(x - 1)(x + 2)^2} + C.$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^4 + x^2 - 2} = \frac{1}{6} \operatorname{Log} \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$\int \frac{(3x^2 + x - 2)\,dx}{(x - 1)^3 (x^2 + 1)} = \frac{3}{4} \operatorname{Log} \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2} - \operatorname{arc\,tg} x + \frac{5x - 6}{2(x - 1)^2} + C.$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^6} = \frac{1}{12} \operatorname{Log} \frac{(1 + x)^2 (1 + x + x^2)}{(1 - x)^2 (1 - x + x^2)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{3}}{1 - x^2} + C.$$

2. Soit $f(x)$ un polynome de degré $< n$; démontrer la formule

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(x - a)^n} = \frac{1}{(n - 1)!} D_a^{n-1} \left[f(a) \operatorname{Log}(x - a)\right] + C.$$

R. C'est une application de la méthode de dérivation (nº 192). On intègre par rapport à x, puis dérive $n - 1$ fois par rapport à a la formule

$$\frac{f(x)}{x - a} = P(x, a) + \frac{f(a)}{x - a},$$

où $P(x, a)$ est un polynome en a de degré $< n$.

3. Soit $f(x)$ un polynome de degré $< 2n$. On le met sous la forme $\varphi(x^2) + x\,\psi(x^2)$ où φ et ψ sont des polynomes en x^2. Soit $a > 0$; on a

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(x^2 + a)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n - 1)!} D_a^{n-1} \left[\frac{\varphi(-a)}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{\psi(-a)}{2} \operatorname{Log}(x^2 + a)\right] + C.$$

R. Solution analogue à la précédente.

§ 3. Intégration des irrationnelles algébriques.

200. Rationalisation et réduction. — On a vu, dans le paragraphe précédent, que les différentielles rationnelles s'intègrent par les fonctions élémentaires. Il n'en est plus ainsi pour les différentielles irrationnelles que dans des cas particuliers. Lorsque cette intégration est possible, elle se fait généralement par l'un des deux procédés suivants : 1° ou bien on rend la différentielle rationnelle par une substitution, ce qui ramène au cas précédent ; 2° ou bien on établit une *formule de réduction* qui fait dépendre l'intégrale cherchée d'une autre plus simple, celle-ci d'une autre plus simple encore, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une intégrale connue. Nous rencontrerons d'abord des applications de la première méthode.

201. Différentielles où figurent des exposants fractionnaires. — Théorème. *Si a, b, c, f sont des constantes quelconques ; α, β,... des exposants rationnels et* R $(x, y, z,\ldots)$ *une fonction rationnelle de x, y, z,..., l'intégrale*

$$\int \mathrm{R}\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\beta}, \ldots\right] dx$$

est réductible par une substitution rationnelle à celle d'une différentielle rationnelle.

Soit m le plus petit commun dénominateur des fractions α, β,... et t une nouvelle variable ; la substitution

$$\frac{ax+b}{cx+f} = t^m, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{ft^m - b}{a - ct^m} = \rho(t)$$

rendra la différentielle rationnelle. En effet, l'intégrale devient ainsi

$$\int \mathrm{R}\left[\rho(t), t^{m\alpha}, t^{m\beta}, \ldots\right] \rho'(t)\, dt$$

et la différentielle sous le signe $\int$ est rationnelle, car $\rho(t)$ et, par suite, $\rho'(t)$ sont des fonctions rationnelles de t et les exposants $m\alpha$, $m\beta$,... sont entiers. On intègre par les procédés du paragraphe précédent et l'on revient, s'il y a lieu, à la variable x par la substitution

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Dans les applications, on rencontre souvent le cas où la fraction $(ax+b):(cx+f)$ se réduit à la variable x elle-même ou à une fonction linéaire de x, comme dans les exemples suivants :

Exemples. Par la substitution $x = t^6$, il vient

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} = 6\int \frac{t^3 dt}{1+t} = 6\int (1-t+t^2)dt - 6\int \frac{dt}{1+t}$$
$$= 6t - 3t^2 + 2t^3 - 6 \operatorname{Log}(1+t) + C$$
$$= 6x^{\frac{1}{6}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6 \operatorname{Log}(1+x^{\frac{1}{6}}) + C.$$

Par la substitution $x - 1 = t^2$, il vient

$$\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x-1}} = 2\int (t^2+1)^3\, dt = 2t\left[\frac{t^6}{7} + 3\frac{t^4}{5} + t^2 + 1\right] + C$$
$$= 2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3}{5}(x-1)^2 + x\right] + C.$$

202. Différentielles qui renferment la racine carrée d'un trinome du second degré. — *Soit* R (x, y) *une fonction rationnelle de x et de y ; si l'on y fait*

$$y = \sqrt{a + bx + cx^2},$$

l'intégrale

$$\int \mathrm{R}(x, y)\, dx$$

est réductible par une substitution rationnelle à celle d'une différentielle rationnelle.

La transformation doit être choisie de manière à éviter l'introduction des imaginaires quand les données sont réelles. On y arrive par l'une des deux substitutions suivantes :

1° Si les racines α et β de $(a + bx + cx^2)$ sont réelles, la substitution est fournie par le théorème précédent. En effet,

$$y = \sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\sqrt{\frac{c(x-\beta)}{(x-\alpha)}}.$$

Donc y et, par suite, R (x, y) sont des fonctions rationnelles de x et de ce dernier radical. La rationalisation se fera par la substitution

$$\frac{c(x-\beta)}{x-\alpha} = t^2.$$

2° Si les racines de $(a + bx + cx^2)$ sont imaginaires, c doit être positif pour que le radical soit réel, sinon le trinome,

ayant le signe de c, serait négatif et sa racine imaginaire. Donc, quand les racines sont imaginaires et, plus généralement, quand c est positif, on peut faire la substitution

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = t \pm x\sqrt{c},$$

d'où, en élevant au carré,

$$a+bx = t^2 \pm 2tx\sqrt{c}.$$

Cette relation est linéaire en x. On en tire donc, $\rho(t)$ désignant une fonction rationnelle,

$$x = \rho(t), \qquad dx = \rho'(t)\,dt \qquad y = t \pm \rho(t)\sqrt{c}.$$

On substitue ces trois valeurs dans l'intégrale et la différentielle à intégrer est rendue rationnelle. Après l'avoir intégrée, on remplace t par sa valeur

$$t = \sqrt{a+bx+cx^2} \pm x\sqrt{c}.$$

Autre substitution. — Lorsque a est positif, la seconde substitution s'appliquera, après avoir remplacé x par $\frac{1}{z}$, car

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{\sqrt{az^2+bz+c}}{z}$$

et le coefficient de z^2 sera positif. La différentielle devient donc rationnelle par la substitution

$$\sqrt{az^2+bz+c} = t \pm z\sqrt{a},$$

ce qui revient à poser directement

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \pm\sqrt{a} + tx.$$

Quand a est positif, cette dernière formule définit une *troisième substitution* rendant la différentielle rationnelle.

Remarque. — Un autre procédé d'intégration consiste à transformer $R(x, y)\,dx$ dans une différentielle rationnelle en $\sin t$ et $\cos t$. Nous y reviendrons au n° 215.

203. Applications. — I. Considérons d'abord l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}.$$

On applique la seconde substitution :

$$\sqrt{a+bx+x^2} = t - x, \qquad \text{d'où} \qquad a+bx = t^2 - 2tx.$$

Différentiant la dernière relation, il vient

$$\frac{dx}{t-x}=\frac{2\,dt}{b+2t}$$

et, par conséquent,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}&=\int\frac{dx}{t-x}=\text{Log}\left(\frac{b}{2}+t\right)+\text{C}.\\ &=\text{Log}\left(\frac{b}{2}+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+\text{C}.\end{aligned}\right.$$

On rencontre souvent le cas où $b=0$; il vient alors

$$(2)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\text{Log}\,(x+\sqrt{x^2+a})+\text{C}.$$

II. Considérons ensuite l'intégrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}.$$

On pourrait utiliser la première substitution, mais le calcul se fait plus facilement en observant que

$$a+bx-x^2=\left(a+\frac{b^2}{4}\right)-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2.$$

On pose, α étant une constante et t la nouvelle variable,

$$a+\frac{b^2}{4}=\alpha^2,\qquad x-\frac{b}{2}=\alpha t,$$

et il vient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}&=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\text{arc sin}\,t+\text{C}\\ &=\text{arc sin}\,\frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}+\text{C}.\end{aligned}\right.$$

III. On rencontre aussi fréquemment les intégrales

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx\pm 1}}.$$

Elles se ramènent aux deux précédentes par la substitution $x=1:z$, déjà signalée au n° 202 :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+1}}&=-\int\frac{dz}{\sqrt{a+bz+z^2}}\\ &=-\text{Log}\left(\frac{b}{2}+\frac{1+\sqrt{ax^2+bx+1}}{x}\right)+\text{C}\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx-1}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{a+bz-z^2}} \\ \displaystyle\qquad = \text{arc sin}\left(\frac{bx-2}{x\sqrt{b^2+4a}}\right) + C. \end{cases}$$

Voici deux cas particuliers fréquents :

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{Log}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C \\ \displaystyle\qquad = \operatorname{Log}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C, \end{cases}$$

$$(7)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\text{arc sin}\frac{1}{x} + C = \text{arc sec}\, x + C.$$

IV. Les deux intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}, \qquad \int \frac{dx}{(x-m)\sqrt{a+bx+cx^2}};$$

se ramènent à celles qui précèdent en prenant respectivement comme nouvelle variable

$$z = \sqrt{\pm c}\, x \qquad \text{ou} \qquad z = \sqrt{\pm c}\,(x-m).$$

On choisit le signe ambigu de manière que $\pm c$ soit positif.

204. Cas d'intégrabilité des différentielles binomes. — Les intégrales des différentielles binomes sont de la forme

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx,$$

où a et b sont des constantes quelconques, différentes de zéro, et m, n, p des exposants rationnels.

Faisons la substitution

$$x^n = t \qquad \text{d'où} \qquad x = t^{\frac{1}{n}} \qquad dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}\, dt\,;$$

l'intégrale devient

$$\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bt)^p\, dt.$$

Désignons par q l'exposant de t, de sorte que $q = \left(\frac{m+1}{n}-1\right)$ L'intégrale prend la *forme simplifiée*

$$\varphi(p, q) = \int (a+bt)^p\, t^q\, dt.$$

THÉORÈME. — *L'intégrale* $\varphi(p, q)$ *est réductible à celle d'une différentielle rationnelle par le théorème du n° 201, si l'un des trois nombres p, q ou p + q est un entier, positif, nul ou négatif.*

En effet, soit R une composante rationnelle ; on met $\varphi(p, q)$ sous la forme prévue au n° 201 en écrivant : si p est entier,

$$\varphi(p, q) = \int R(t, t^q)\, dt\,;$$

si q est entier,

$$\varphi(p, q) = \int R\left[(a + bt)^p, t\right] dt\,;$$

et, si $p + q$ est entier,

$$\varphi(p, q) = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q}\, dt = \int R\left[\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p, t\right] dt.$$

Remontons maintenant à l'intégrale primitive, et observons que $q = \frac{m+1}{n} - 1$, nous obtenons l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *L'intégrale d'une différentielle binome est réductible à celle d'une différentielle rationnelle et, par suite, l'intégration se fait par les fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires, si l'un des trois nombres* $\frac{m+1}{n}$ *ou* p *ou* $\frac{m+1}{n} + p$ *est entier.*

Tchebichef a démontré (*) que, en dehors de ces trois cas d'intégrabilité pratique, l'intégrale ne peut pas s'exprimer au moyen des fonctions élémentaires. On devra donc alors se borner à la ramener à la forme la plus simple en se servant des méthodes de réduction que nous allons indiquer.

205. Formules de réduction des intégrales de différentielles binomes.— Supposons l'intégrale préalablement ramenée à sa forme simplifiée :

$$\varphi(p, q) = \int (a + bt)^p\, t^q\, dt.$$

THÉORÈME. — *Sauf les cas d'intégrabilité pratique,* $\varphi(p, q)$ *est réductible à des fonctions algébriques et à une autre intégrale de même forme où chacun des exposants p et q est augmenté ou diminué d'autant d'unités qu'on le veut.*

(*) Sur l'intégration des différentielles irrationnelles. Journal de Liouville T. XVIII. 1853.

Considérons, en effet, les deux identités :

$$(a + bt)(a + bt)^p t^q = a(a + bt)^p t^q + b(a + bt)^p t^{q+1},$$
$$\text{D}.(a+bt)^{p+1} t^{q+1} = (p+1)\, b\, (a+bt)^p t^{q+1} + (q+1)(a+bt)^{p+1} t^q.$$

En les intégrant (ce qui revient à une intégration par décomposition et une autre par parties) on obtient respectivement :

$$\varphi(p + 1, q) = a\,\varphi(p, q) + b\,\varphi(p\,q + 1),$$
$$(a + bt)^{p+1} t^{q+1} = (p + 1)\, b\,\varphi(p, q + 1) + (q + 1)\,\varphi(p + 1, q).$$

Entre ces deux équations, on peut éliminer $\varphi(p + 1, q)$ ou bien $\varphi(p, q + 1)$. En résolvant alors par rapport à $\varphi(p, q)$, on trouve les deux formules :

$$(1) \qquad a\,\varphi(p, q) = -\frac{(a + bt)^{p+1} t^{q+1}}{p + 1} + \frac{p + q + 2}{p + 1}\,\varphi(p + 1, q),$$

$$(2) \qquad a\,\varphi(p, q) = \frac{(a + bt)^{p+1} t^{q+1}}{q + 1} - b\,\frac{p + q + 2}{q + 1}\,\varphi(p, q + 1).$$

Ces formules font dépendre $\varphi(p, q)$ d'une intégrale de même forme, mais où p ou q est augmenté d'une unité. Les deux formules suivantes, qu'on en déduit en résolvant les précédentes par rapport aux intégrales des seconds membres, mais en remplaçant p par $p - 1$ dans la première et q par $q - 1$ dans la seconde, à savoir :

$$(3) \qquad \varphi(p, q) = \frac{(a + bt)^p t^{q+1}}{p + q + 1} + \frac{ap}{p + q + 1}\,\varphi(p - 1, q),$$

$$(4) \qquad b\,\varphi(p, q) = \frac{(a + bt)^{p+1} t^q}{p + q + 1} - \frac{aq}{p + q + 1}\,\varphi(p, q - 1),$$

font dépendre $\varphi(p, q)$ d'une intégrale de même forme, mais où p ou q est diminué d'une unité. Aucune des quatre dernières formules ne peut devenir illusoire, car, aucun des nombres $p, q, p + q$ n'étant entier, aucun des dénominateurs $p + 1$, $q + 1$, $p + q + 1$ ne peut être nul.

L'emploi des formules (1), (2), (3), (4) permet donc d'augmenter ou de diminuer d'autant d'unités qu'on le veut un des deux exposants p ou q, sans toucher à l'autre. On pourra donc, de proche en proche, faire dépendre $\varphi(p, q)$ d'une autre intégrale de même forme, mais où p et q seront compris entre deux entiers consécutifs choisis à volonté, par exemple 0 et 1. Comme celle-ci n'est plus susceptible de réduction ultérieure, on la considérera comme une nouvelle transcendante.

206. Usages des formules de réduction dans les cas d'intégrabilité pratique. — Dans les cas d'intégrabilité pratique, les formules de réduction peuvent devenir illusoires. Mais cette éventualité ne se présente que pour des valeurs exceptionnelles de p, q et les formules peuvent servir à l'intégration. Nous allons en donner des exemples.

Nous pouvons toujours supposer, dans les cas d'intégrabilité, que ce soit l'un des exposants p ou q qui est entier. En effet, si $p+q$ était entier, on ferait la substitution $t = 1 : z$ et l'on aurait

$$\varphi(p, q) = -\int z^{-p-q-2}(b+az)^p dz,$$

ce qui ramène au cas précédent.

Supposons, en premier lieu, que p et q soient entiers tous les deux : je dis qu'on pourra les réduire tous les deux à l'une des valeurs 0 ou -1. En effet, si p, q sont négatifs tous les deux, on les ramène à -1 par l'emploi des formules (1) ou (2), qui ne deviennent illusoires que si $p+1=0$ ou si $q+1=0$. Si un seul des exposants p, q est négatif, on commence par le réduire à -1 ; après quoi on abaisse l'autre à zéro par les formules (3) ou (4), Celles-ci ne seront pas illusoires, car $p+q+1$ ne s'annule pas au cours de la réduction. Enfin, si p, q sont tous deux positifs, les formules (3) et (4) permettent de les réduire tous deux à zéro. Dans ces divers cas, le calcul de l'intégrale réduite sera devenu immédiat.

Supposons, en second lieu, qu'un seul des exposants p, q soit entier. Les formules ne deviennent illusoires que pour réduire l'exposant entier de -1 à 0. Elles pourront donc servir à le réduire à 0 s'il est positif, et à -1 s'il est négatif. Dans le premier cas, l'intégration sera immédiate. Dans le second, elle sera simplifiée, mais devra s'achever par rationalisation.

Exemples : I. Considérons l'intégrale de différentielle binome

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^p},$$

où p est entier et positif. Par la substitution $x=\sqrt{t}$, il vient

$$2\int \frac{dx}{(1+x^2)^p} = \int (1+t)^{-p} t^{-\frac{1}{2}} dt = \varphi\left(-p, -\frac{1}{2}\right).$$

Donc l'emploi de la formule de réduction (1) permet de réduire l'exposant p à 1. Il vient ensuite, ce qui termine le calcul,

$$\int \frac{t^{-\frac{1}{2}} dt}{(1+t)} = 2\int \frac{dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Il est clair d'ailleurs que la formule (1) peut s'exprimer directement au moyen de x. On trouve, en y remplaçant t par x^2 et divisant par 2, la formule de réduction suivante, qu'il est facile d'établir directement :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^p} = \frac{1}{2p-2}\,\frac{x}{(1+x^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2p-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{p-1}}.$$

II. Considérons l'intégrale de différentielle binome

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

dans laquelle m désigne un entier positif ou négatif. Par la substitution $x^2 = t$, on a

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{m-1}{2}} dt = \frac{1}{2}\varphi\left(-\frac{1}{2}, \frac{m-1}{2}\right).$$

Suivant que m est positif ou négatif, on se sert de la formule (4) ou de (2). Elles permettent de ramener l'exposant $\frac{m-1}{2}$ à la valeur $-\frac{1}{2}$ si m est pair, et à l'une des valeurs 0 ou -1 selon que m est impair positif ou négatif. Alors m a une des valeurs 0, 1 et -1. En revenant à la variable x, on aura à calculer une des trois intégrales :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

qui ont pour valeurs (nº 203), à une constante près,

$$\arcsin x, \qquad -\sqrt{1-x^2}, \qquad \operatorname{Log}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

III. Dans la théorie du pendule, on rencontre l'intégrale

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Ce n'est plus une intégrale de différentielle binome, mais on la ramène, à son choix, à l'une ou à l'autre des deux intégrales de différentielle binome (I) ou (II) par les substitutions :

$$x = at^2 \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{ax-x^2} = xz.$$

On trouve, après quelques réductions faciles,

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}} = 2\,a^m \int \frac{t^{2m} dt}{\sqrt{1-t^2}} = -2\,a^m \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m+1}},$$

ce qui ramène aussi l'une à l'autre les intégrales (I) et (II).

207. Cas particuliers simples des intégrales de différentielles binomes. — Parmi les cas d'intégrabilité pratique de l'intégrale $\varphi(p, q)$, il y en a trois que l'on peut considérer comme des *cas d'intégrabilité facile*. Ce sont ceux où l'un des nombres p, q ou $-(p+q+2)$ est entier positif.

En effet : 1° Si p est entier positif, on développe $(a+bt)^p$ par la formule du binome et l'intégrale

$$\int (a+bt)^p \, t^q \, dt$$

se calcule par décomposition. 2° Si q est entier, on prend $a+bt$ pour variable, ce qui ramène au cas précédent. 3° Si $p+q+2$ est entier négatif, la substitution $t = 1 : z$ ramène au cas que nous venons d'examiner. Dans ces divers cas, l'emploi de la formule de réduction sera donc rarement avantageux (*).

EXERCICES.

1. Intégrales à calculer par le théorème du n° 201 :

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}, \qquad \int \frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1+x^{\frac{1}{4}}} dx$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}, \qquad \int (a+x)^{\frac{2}{3}} x^3 dx, \qquad \int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{1}{3}}-(1+x)^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Intégrales à calculer par le théorème du n° 202 :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

$$\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = -2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1+x-x^2}-(1+x)}{x} + C.$$

3. Différentielles binomes à intégrer :

$$\int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x}} - \frac{3}{2} \arcsin x + C$$

$$\int x^3 (a+x^2)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{14} (a+x^2)^{\frac{4}{3}} \left(x^2 - \frac{3a}{4}\right) + C$$

(*) L'exemple II du numéro précédent rentre dans le troisième *cas d'intégrabilité facile* si m est pair et négatif.

4. Montrer que toute différentielle binome $x^m(a+bx^n)^p dx$ peut, à part un facteur constant, se ramener à la forme (μ et ν rationnels)

$$\sin^\mu \varphi \cos^\nu \varphi d\varphi.$$

R. On y arrive par les trois substitutions suivantes, dont l'une au moins est réelle :

$$\frac{a+bx^n}{a} = \cos^2\varphi \text{ ou } \frac{1}{\cos^2\varphi} \text{ ou } -\operatorname{tg}^2\varphi.$$

§ 4. Intégration des fonctions transcendantes.

208. Rationalisation. — Un grand nombre de différentielles, qui renferment des fonctions exponentielles et circulaires ou leurs inverses, peuvent être rendues rationnelles par une substitution de variables, c'est-à-dire qu'elles prennent la forme

$$R(u)\,du,$$

où R désigne une fonction rationnelle. Les substitutions qui conduisent à ce résultat sont immédiatement apparentes dans les différentielles suivantes :

$$R(e^x)\,e^x dx, \qquad R(\operatorname{Log} x)\frac{dx}{x}, \qquad R(\operatorname{arc\,tg} x)\frac{dx}{1+x^2};$$

ce sont respectivement :

$$e^x = u, \qquad \operatorname{Log} x = u, \qquad \operatorname{arc\,tg} x = u.$$

Mais on peut rendre rationnelles des différentielles pour lesquelles la substitution convenable est moins facile à apercevoir et nous allons en examiner quelques types généraux.

209. Intégration de $R(\sin x, \cos x)\,dx$. — Suivant le cas, quatre substitutions principales rendent rationnelles les différentielles de cette forme où R désigne une composante rationnelle :

I. *Si* R *est une fonction impaire de* $\cos x$, *c'est-à-dire une fonction qui ne fait que changer de signe quand on y remplace* $\cos x$ *par* $-\cos x$, *on rend* $R dx$ *rationnelle par la substitution*

$$\sin x = z.$$

En effet, le quotient $R : \cos x$, ne changeant plus de signe, ne contiendra plus le cosinus qu'au carré et sera, par consé-

quent, une fonction rationnelle, R_1, du sinus seul. On aura donc

$$R = R_1(\sin x)\cos x,$$

et, par la substitution proposée,

$$R\,dx = R_1(z)\,dz.$$

II. *Si* R *est une fonction impaire de* $\sin x$, *on rend* $R dx$ *rationnelle par la substitution*

$$\cos x = z.$$

On a, en effet, par le raisonnement analogue au précédent,

$$R = R_1(\cos x)\sin x, \qquad R\,dx = -R_1(z)\,dz.$$

III. *Si* $R(\sin x, \cos x)$ *ne change pas quand on remplace à la fois* $\sin x$ *par* $-\sin x$ *et* $\cos x$ *par* $-\cos x$, *on rend* $R dx$ *rationnelle par la substitution*

$$\operatorname{tg} x = z.$$

En effet, remplaçons, dans R, $\sin x$ par $\cos x \operatorname{tg} x$. Nous formons une fonction du cosinus et de la tangente que le changement de signe du cosinus n'altère plus, qui ne contient donc le cosinus qu'au carré. C'est donc une fonction rationnelle, R_1, de la tangente seule, car $\cos^2 x$ peut se remplacer par $1:(1+\operatorname{tg}^2 x)$, et l'on a

$$R\,dx = R_1(\operatorname{tg} x)\,dx = R_1(z)\frac{dz}{1+z^2}.$$

IV. *Dans tous les cas, on rend* $R(\sin x, \cos x)\,dx$ *rationnelle par la substitution*

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

On a, en effet, en fonction rationnelle de z,

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \qquad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}.$$

Remarques. — La dernière substitution peut toujours être évitée. En effet, si l'on décompose R comme il suit :

$$\begin{aligned} 2R\,dx = {} & [R(\sin x, \cos x) + R(-\sin x, -\cos x)]\,dx \\ & + [R(\sin x, \cos x) - R(-\sin x, \cos x)]\,dx \\ & + [R(-\sin x \cos x) - R(-\sin x, -\cos x)]\,dx, \end{aligned}$$

chacun des termes écrit sur une ligne peut être rendu rationnel

par une des trois premières substitutions : le premier par la substitution III ; le deuxième par la substitution II ; le troisième par la substitution I.

On rencontre souvent des différentielles renfermant d'autres lignes trigonométriques que sin x et cos x, comme tg x, sec x, etc... On commence par exprimer rationnellement ces nouvelles lignes au moyen de sin x et de cos x, après quoi les théorèmes généraux s'appliquent.

Dans d'autres cas, la différentielle renferme, outre sin x et cos x, des sinus et des cosinus de multiples entiers de x comme sin $2x$, sin $3x$, cos $2x$, etc. On les exprime par des polynomes en sin x et cos x et les méthodes générales s'appliquent.

Enfin, si la différentielle renferme sin αx, sin βx, cos γx, etc., α, β, γ... désignant des nombres rationnels dont m sera le plus petit commun dénominateur, on pose $x = mz$, on prend z comme nouvelle variable et on est ramené au cas précédent.

Applications. — I. On trouve, par les substitutions (I) ou (II),

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \text{Log} \sin x + C, \qquad \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\text{Log} \cos x + C,$$

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C;$$

par la substitution III,

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \text{Log}\, \text{tg}\, x + C\,;$$

par la substitution (IV),

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \text{Log}\, \text{tg} \frac{x}{2} + C,$$

et, en remplaçant x par $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \text{Log}\, \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

II. Passons à l'exemple plus compliqué

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

Aucune des trois premières substitutions n'est applicable isolément, employons la dernière :

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \qquad dx = \frac{2\,dz}{1 + z^2}.$$

L'intégrale proposée devient

$$\int \frac{2\,dz}{(a+b) + (a-b)z^2}.$$

En changeant au besoin le signe de l'intégrale, nous pouvons admettre que $(a + b)$ est positif, alors $(a - b)$ est positif ou négatif.

Si $a - b$ est > 0, posons $a + b = \alpha^2$, $a - b = \beta^2$; nous aurons

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \int \frac{2\,dz}{\alpha^2 + \beta^2 z^2} = \frac{2}{\alpha\beta} \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta z}{\alpha} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Si $a - b$ est < 0, posons $a + b = \alpha^2$, $a - b = -\beta^2$; nous aurons

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \int \frac{2\,dz}{\alpha^2 - \beta^2 z^2} = \frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{Log}\frac{\alpha + \beta z}{\alpha - \beta z} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Log}\frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Log}\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x} + C.$$

III. On ramène à la précédente l'intégrale

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x},$$

en déterminant deux quantités r et φ par les relations

$$b = r\cos\varphi, \qquad c = r\sin\varphi\,;$$

l'intégrale devient

$$\int \frac{dx}{a + r\cos(x - \varphi)},$$

et sa valeur s'obtient en remplaçant b par r et x par $x - \varphi$ dans la précédente.

210. Intégration de $\sin^m x \cos^n x\,dx$. — Si m et n sont entiers, cette différentielle est un cas particulier de celle du nº précédent. Elle peut donc être rationalisée par les substitutions

indiquées. Nous allons d'abord attirer l'attention sur cinq cas dans lesquels l'intégration est facile par ces substitutions. Les trois premiers ne supposent pas que m et n soient entiers tous les deux.

Cas d'intégrabilité facile. — Voici d'abord quatre cas où l'intégration est immédiate par décomposition en développant la puissance d'un binome tel que $(1 - z^2)$. On suppose k entier et positif :

1° $m = 2k + 1$, on pose $\cos x = z$, d'où

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\int (1 - z^2)^k z^n \, dz ;$$

2° $n = 2k + 1$, on pose $\sin x = z$, d'où

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int z^m (1 - z^2)^k \, dz ;$$

3° $m + n = -2k$, on pose $\operatorname{tg} x = t$ ou $\cot x = u$, d'où

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int t^m (1 + t^2)^{k-1} \, dt = -\int u^n (1 + u^2)^{k-1} \, du ;$$

4° $n = 0$ et $m = -2k - 1$, on pose $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$, d'où

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x} = \frac{1}{2^{2k}} \int \frac{(1 + z^2)^{2k} \, dz}{z^{2k+1}} = \frac{1}{2^{2k}} \int \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2k} \frac{dz}{z}.$$

Considérons encore un 5e cas où la décomposition se fait autrement :

5° Si $m + n = 0$ (m entier) les substitutions du cas 3° donnent

$$\int \operatorname{tg}^m x \, dx = \int \frac{t^m dt}{1 + t^2} = -\int \frac{u^n du}{1 + u^2}.$$

Si c'est m qui est positif, on effectue la division de t^m par $1 + t^2$ et chaque terme est immédiatement intégrable. Dans le cas contraire, c'est u^n qu'on divisera par $(1 + u^2)$.

Formules de réduction (*). — On a

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{m-1} x (\cos^n x \sin x \, dx) ;$$

(*) La différentielle $\sin^m x \cos^n x \, dx$ se transforme à un facteur numérique près dans la différentielle binome

$$t^{\frac{m+1}{2}} (1 - t)^{\frac{n-1}{2}} dt$$

par la substitution $\sin x = \sqrt{t}$. Les formules de réduction établies ici ne sont que les transformées de celles relatives aux différentielles binomes.

d'où, en intégrant par parties, la formule (1) :

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x\cos^{n+2}x dx$$

D'autre part, si l'on fait porter l'intégration sur le sinus après avoir isolé un facteur cos x, on a la formule (2) :

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2}x\cos^{n-2}x dx$$

Dans l'intégrale qui est au second membre de la formule (1), remplaçons un facteur $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$. Cette intégrale se décompose en deux autres, dont celle du premier membre. En résolvant par rapport à celle-ci, nous obtenons la formule (3) :

$$\int \sin^m \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x\cos^n x dx.$$

Opérons de même sur l'équation (2), mais en remplaçant un facteur $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, nous obtenons la formule (4) :

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2}x dx$$

Enfin, changeons m en $m+2$ dans la formule (3) et n en $n+2$ dans la formule (4) et résolvons chacune des deux formules par rapport à l'intégrale du second membre. Nous obtenons les formules (5) et (6) :

$$\int \sin^m x\cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2}x\cos^n x dx$$

$$\int \sin^m x\cos^n x dx = -\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x\cos^{n+2}x dx$$

Si m et n sont entiers, l'emploi combiné des quatre dernières formules permet d'effectuer l'intégration dans les diverses hypothèses possibles.

En effet, ces formules permettent de diminuer ou d'augmenter de deux unités un des deux exposants sans toucher à l'autre. Par la répétition de cette opération, on peut donc ramener les deux exposants à l'un des trois nombres -1, 0 ou 1. Seul le passage de -1 à $+1$ ne peut se faire, le dénominateur des formules s'annulant dans ce cas. Quand la réduction des exposants est faite, l'intégration est immédiate ou très facile.

Les deux premières formules serviront aussi avec avantage si les deux exposants m et n sont de signes contraires, car elles

permettent de réduire les deux exposants à la fois jusqu'à ce que l'un d'eux soit ramené à -1, 0 ou 1. Après cela, la réduction doit se continuer par les autres formules.

INTÉGRATION PAR DÉCOMPOSITION. — La méthode que nous allons indiquer est applicable chaque fois que les deux exposants m et n sont entiers nuls ou positifs. Mais la méthode de rationalisation est plus expéditive, sauf peut-être si m et n sont pairs tous les deux.

Cette méthode consiste à décomposer, par les formules de la trigonométrie, $\cos^n x$ en une somme de cosinus de multiples de x et $\sin^m x$ en une somme de sinus ou de cosinus de multiples de x (*). En effectuant la multiplication, on trouve des produits partiels, qui se décomposeront eux-mêmes par les formules :

$$\sin \lambda x \cos \mu x = \frac{1}{2}\left[\sin(\lambda+\mu)x + \sin(\lambda-\mu)x\right]$$

$$\cos \lambda x \cos \mu x = \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda+\mu)x + \cos(\lambda-\mu)x\right]$$

et ces nouveaux termes s'intègrent immédiatement.

(*) Ces formules se déduisent facilement de celle de Moivre. On part de l'identité

$$2\cos x = (\cos x + i\sin x) + (\cos x - i\sin x).$$

On élève à la puissance n par la formule du binome, mais en ayant égard aux relations

$$(\cos x + i\sin x)^p = \cos px + i\sin px.$$
$$(\cos x + i\sin x)(\cos x - i\sin x) = 1.$$

Il vient facilement

$$2^n \cos^n x = (\cos nx + i\sin nx) + n[\cos(n-2)x + i\sin(n-2)x]$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}[\cos(n-4)x + i\sin(n-4)x] + \dots$$

En négligeant les termes imaginaires, qui se détruisent, on trouve l'expression cherchée pour $\cos^n x$:

$$2^n \cos^n x = \cos nx + n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{2}\cos(n-4) + \dots,$$

Les coefficients sont ceux du binome, de sorte que les termes à égale distance des extrêmes sont égaux dans cette formule.

Le développement analogue de $\sin^n x$ se déduit du précédent, en y changeant x en $x + \pi : 2$. Il est de l'une des deux formes suivantes, suivant que n est pair ou impair :

$$2^n \sin^n x = (-1)^{\frac{n}{2}}[\cos nx - n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{2}\cos(n-4)x - \dots$$

$$2^n \sin^n x = (-1)^{\frac{n+1}{2}}[\sin nx - n\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{2}\sin(n-4)x - \dots$$

Dans les deux cas, les termes à égale distance des extrêmes seront encore égaux.

Lorsque m et n sont pairs tous deux, le procédé de décomposition suivant, qui ne demande aucun effort de mémoire, est commode en pratique, Soit $m = 2p$, $n = 2q$:

1° Si p est $\geqslant q$, on écrit

$$\sin^{2p} x \cos^{2q} x = \sin^{2p} x (\sin x \cos x)^{2q} = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{p-q} \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2q}$$
$$= \frac{(1-\cos 2x)^{p-q} \sin^{2q} 2x}{2^{p+q}}.$$

2° Si p est $< q$, on écrit

$$\sin^{2p} x \cos^{2q} x = (\sin x \cos x)^{2p} \cos^{2q-2p} x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2p} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{q-p}$$
$$= \frac{(\sin 2x)^{2p} (1+\cos 2x)^{q-p}}{2^{p+q}}.$$

On développe par la formule du binome en une somme de termes de la forme $\sin^{\lambda} 2x \cos^{\mu} 2x$, mais où $\lambda + \mu$ ne peut surpasser $p+q$. Ceux où l'un des exposants λ ou μ est impair rentrent dans un cas d'intégrabilité facile. Les autres termes se décomposent par le même procédé en éléments de la forme $\sin^{\lambda} 4x \cos^{\mu} 4x$. On continue ainsi de suite jusqu'à ce que tous les termes s'intègrent. La réduction marche rapidement, puisque la somme $\lambda + \mu$ des exposants est réduite *au moins de moitié* à chaque nouvelle décomposition.

211. Intégration de $E(x)e^{ax}dx$. — Cette différentielle, dans laquelle $E(x)$ désigne un polynome, s'intègre le plus facilement par la formule d'intégration par parties. On a

$$\int E(x) e^{ax} dx = \frac{1}{a} E(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int E'(x) e^{ax} dx.$$

Cette formule fait dépendre l'intégrale proposée d'une autre de même forme, mais où le degré du polynome est abaissé d'une unité. C'est une formule de réduction. En l'appliquant de proche en proche, il vient

$$\int E(x) e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left[E(x) - \frac{E'(x)}{a} + \frac{E''(x)}{a^2} - \dots \right]$$

Cette formule s'arrête d'elle-même quand les dérivées deviennent identiquement nulles.

Remarque I. — Il existe une expression symbolique utile de l'intégrale précédente. Décomposons-la en une somme d'autres,

ne renfermant qu'un seul terme du polynome E(x). Chacune de celles-ci s'intègre par la formule symbolique (4) du n° (192) ; on a ainsi, pour $n = 0, 1, 2, 3....$,

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \mathrm{D}_a^n \frac{e^{ax}}{a} + \mathrm{C}.$$

Si l'on multiplie chacune de ces formules par le coefficient de x^n dans E(x) et si l'on fait leur somme, on trouve l'équation suivante, remarquable par sa concision :

$$\int \mathrm{E}(x)\, e^{ax}\,dx = \mathrm{E}(\mathrm{D}_a)\frac{e^{ax}}{a} + \mathrm{C}.$$

Remarque II. — On ramènerait à la précédente les différentielles des nos 212, 213 et 214 en remplaçant les lignes trigonométriques par des exponentielles imaginaires, au moyen des formules d'Euler données à la fin du volume, mais nous écartons cette méthode pour le moment. Elle serait cependant la plus simple.

212. Intégration de E(x) sin $ax\,dx$ **et de** E(x) cos $ax\,dx$. — Ces différentielles, dans lesquelles E(x) désigne encore un polynome, s'intègrent par parties et s'obtiennent par un calcul analogue au précédent. Une première intégration par parties donne

$$\int \mathrm{E}(x)\cos ax\,dx = \mathrm{E}(x)\frac{\sin ax}{a} - \frac{1}{a}\int \mathrm{E}'(x)\sin ax\,dx,$$

$$\int \mathrm{E}(x)\sin ax\,dx = -\mathrm{E}(x)\frac{\cos ax}{a} + \frac{1}{a}\int \mathrm{E}'(x)\cos ax\,dx.$$

Ces deux formules ensemble fournissent une méthode de réduction. En les employant alternativement, il vient :

$$\int \mathrm{E}(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[\mathrm{E}(x) - \frac{\mathrm{E}''(x)}{a^2} + \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4} - \dots\right]$$
$$+ \frac{\cos ax}{a}\left[\frac{\mathrm{E}'(x)}{a} - \frac{\mathrm{E}'''(x)}{a^3} + \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{V}}(x)}{a^5} - \dots\right] + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{E}(x)\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[\frac{\mathrm{E}'(x)}{a} - \frac{\mathrm{E}'''(x)}{a^3} + \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{V}}(x)}{a^5} - \dots\right]$$
$$- \frac{\cos ax}{a}\left[\mathrm{E}(x) - \frac{\mathrm{E}''(x)}{a^2} + \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4} - \dots\right] + \mathrm{C}.$$

213. Intégration de $x^n e^{ax} \cos bx\, dx$ et de $x^n e^{ax} \sin bx\, dx$. — On a

$$d(e^{ax} \cos bx) = e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx)\, dx,$$
$$d(e^{ax} \sin bx) = e^{ax}(b \cos bx + a \sin bx)\, dx.$$

On en tire

$$a\, d(e^{ax} \sin bx) - b\, d(e^{ax} \cos bx) = (a^2 + b^2)\, e^{ax} \sin bx\, dx,$$
$$b\, d(e^{ax} \sin bx) + a\, d(e^{ax} \cos bx) = (a^2 + b^2)\, e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Il vient donc, en intégrant,

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + \mathrm{C},$$
$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + \mathrm{C}.$$

Les intégrales plus générales proposées dans le titre, se déduisent des précédentes par la méthode de dérivation. En dérivant n fois par rapport à a, il vient

$$\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx = \mathrm{D}_a^n \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + \mathrm{C},$$
$$\int x^n e^{ax} \cos bx\, dx = \mathrm{D}_a^n \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + \mathrm{C}.$$

214. Différentielles réductibles aux précédentes. — I. *On peut réduire aux précédentes et, par conséquent, intégrer les différentielles de la forme générale*

$$\mathrm{E}(x,\, e^{ax},\, \sin bx,\, \sin cx, \ldots \cos ex,\, \cos fx, \ldots)\, dx$$

où $\mathrm{E}(x, y, \ldots)$ *désigne un polynome en* $x, y, \ldots$ *et* $a, b, c, \ldots$ *des constantes quelconques.*

En effet, chaque terme du polynome E contient en facteur un produit de sinus et de cosinus à certaines puissances. On le décomposera en une somme de sinus ou de cosinus par les formules indiquées au n° 210 pour la décomposition des puissances ou des produits de sinus ou de cosinus, formules auxquelles il faut ajouter

$$\sin \lambda x \sin \mu x = \frac{1}{2}\Big[\cos(\lambda - \mu)\, x - \cos(\lambda + \mu) x\Big],$$

et qui permettent de décomposer de proche en proche des produits de deux, trois, quatre,... facteurs. Après ces décompositions, la différentielle proposée se partagera en une somme d'autres des divers types déjà intégrés :

$$x^m e^{nax}\, dx, \qquad x^m e^{nax} \sin px\, dx, \qquad x^m e^{nax} \cos px\, dx.$$

II. *On peut ramener aux précédentes et, par conséquent, intégrer les différentielles :*

$$\mathrm{E}(x, \operatorname{Log} x)\, dx, \qquad \mathrm{E}(x, \operatorname{arc\,sin} x)\, dx, \qquad \mathrm{E}(x, \operatorname{arc\,cos} x)\, dx$$

où $\mathrm{E}(x, y)$ *est un polynome en* x, y.

En effet, par les substitutions respectives

$$\operatorname{Log} x = z, \qquad \operatorname{arc\,sin} x = z, \qquad \operatorname{arc\,cos} x = z,$$

ces différentielles deviennent

$$\mathrm{E}(e^z, z)\, e^z\, dz, \qquad \mathrm{E}(\sin z, z) \cos z\, dz, \quad -\mathrm{E}(\cos z, z) \sin z\, dz$$

et elles rentrent dans celles du théorème précédent.

215. Différentielles qui renferment la racine carrée d'un polynome du second degré. — Les différentielles qui ne renferment pas d'autre irrationalité que la racine carrée d'un polynome du second degré peuvent, comme nous allons le montrer, se ramener par substitution à des différentielles rationnelles en $\sin t$ et $\cos t$. C'est un nouveau procédé d'intégration à ajouter à ceux du n° 202.

1° Si le radical est de la forme $\sqrt{a^2 - x^2}$, on pose

$$x = a \sin t, \qquad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= a \cos t\, dt, \\ \sqrt{a^2 - x^2} &= a \cos t. \end{aligned} \right.$$

C'est la méthode déjà rencontrée au n° 190, 3°.

2° Si le radical est de la forme $\sqrt{a^2 + x^2}$, on pose

$$x = a \operatorname{tg} t, \qquad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= \frac{a\, dt}{\cos^2 t}, \\ \sqrt{a^2 + x^2} &= \frac{a}{\cos t}. \end{aligned} \right.$$

3° Si le radical est de la forme $\sqrt{x^2 - a^2}$, on pose

$$x = a \sec t, \qquad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= a \operatorname{tg} t \sec t\, dt, \\ \sqrt{x^2 - a^2} &= a \operatorname{tg} t. \end{aligned} \right.$$

Dans tous les cas, on peut ramener, par une substitution linéaire, le radical (supposé réel) à l'une de ces trois formes.

Exercices.

1. Cas d'intégrabilité facile du n° 210 :

$$\int \sin^5 x\, dx = -\left(\cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x\right) + \mathrm{C}.$$

$$\int \sin^7 x\,dx = -\left(\cos x - \cos^3 x + \frac{3}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\left(\cot x + \frac{2}{3}\cot^3 x + \frac{1}{5}\cot^5 x\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \frac{1}{64}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{8}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2$$
$$- \frac{1}{64}\left(\cot\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{8}\left(\cot\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

2. On trouve par les formules de réduction du nº 210 :

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2}{3}\cot x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4}\left(\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{5}{2}\,\frac{1}{\cos^2 x}\right) + \frac{3}{8}\operatorname{Log}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \frac{\sin^2 x}{3\cos^3 x} - \frac{2}{3\cos x} + C.$$

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{\sin x\cos x}{4}\left(\sin^2 x + \frac{3}{2}\right) + \frac{3x}{8} + C.$$

3. On trouve par décomposition (nº 210)

$$\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2^4}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C.$$

4. Démontrer les formules suivantes :

$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

$$\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}\,dx = \operatorname{Log}(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

$$\int \frac{(1 - r\cos x)\,dx}{1 - 2r\cos x + r^2} = \frac{x}{2} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

$$\int x^4\cos x\,dx = \sin x\,(x^4 - 12x^2 + 24) + \cos x\,(4x^3 - 24x) + C.$$

$$\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2\cos^2 x + 2a\sin x\cos x + 2) + C.$$

$$\int e^{ax}\sin^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}(a^2\sin^2 x - 2a\sin x\cos x + 2) + C.$$

$$\int x^n\operatorname{Log} x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\operatorname{Log} x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

$$\int (\operatorname{Log} x)^n\,dx = x[\operatorname{Log} x)^n - n(\operatorname{Log} x)^{n-1} + n(n-1)(\operatorname{Log} x)^{n-2} - \cdots] + C.$$

$$\int (\operatorname{arc\,sin} x)^2\,dx = x\,[(\operatorname{arc\,sin} x)^2 - 2] + 2(\operatorname{arc\,sin} x)\sqrt{1 - x^2} + C.$$

CHAPITRE VI.

Théorie élémentaire des intégrales définies. Intégrale de Riemann.

---

§ 1. Intégrales définies considérées comme limites de sommes.

216. Fonctions intégrables au sens élémentaire. Première définition de l'intégrale définie. — Nous nous proposons ici de faire la théorie des intégrales définies sous la forme la plus élémentaire et non la plus générale. Nous dirons donc, quitte à généraliser cette définition plus tard, qu'une fonction $f(x)$ est *intégrable* (au sens élémentaire) dans un intervalle (a, b) si elle est continue dans cet intervalle et, plus généralement, si, n'étant pas continue, elle est bornée et ne possède qu'un nombre limité de points de discontinuité dans l'intervalle (a, b).

Ceci posé, soit $f(x)$ une fonction *intégrable* dans un intervalle (a, b) et ayant pour bornes supérieure et inférieure les nombres M et m, c'est-à-dire (n° 12) que ce sont les deux nombres les plus rapprochés entre lesquels la fonction demeure comprise quand x varie dans (a, b). Décomposons l'intervalle (a, b) en éléments consécutifs par les points $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots x_{n+1} = b$. Soient, en général, $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ l'amplitude d'un des intervalles élémentaires et m_i la borne inférieure de $f(x)$ dans cet intervalle δ_i. Formons la somme, étendue à tous les intervalles δ_i depuis a jusque b,

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \delta_i.$$

On peut former une infinité de sommes analogues en faisant varier le mode de subdivision de l'intervalle (a, b). Mais, puisque m_i est compris entre m et M, toutes ces sommes sont comprises entre $m\Sigma\delta_i = m\,(b - a)$ et $\text{M}\Sigma\delta_i = \text{M}\,(b - a)$. Elles ont

donc en particulier une borne supérieure, c'est-à-dire qu'il existe un plus petit nombre qu'elles ne peuvent surpasser (nº 12). Cette borne est une *intégrale définie* ; elle se désigne par la notation

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Les quantités a et b, valeurs extrêmes de x entre lesquelles se fait la sommation, sont les limites de l'intégrale : a est sa *limite inférieure,* b sa *limite supérieure.*

L'expression (1) se prononce *intégrale* ou *somme* de a à b $f(x)dx$.

La lettre x sous le signe d'intégration est la *variable d'intégration* et elle peut être remplacée par toute autre lettre, l'expression

$$\int_a^b f(y)\, dy$$

est identique à la précédente.

L'intégrale définie jouit des deux propriétés suivantes, qui vont nous servir à en transformer la définition.

217. Théorème de la moyenne (Cas particulier). — De même que les sommes s dont elle est la limite, l'intégrale (1) est comprise entre les deux quantités $m\,(b-a)$ et $M\,(b-a)$. On exprime ce théorème, connu sous le nom de *théorème de la moyenne,* par la relation

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mu\,(b-a),$$

où μ désigne une certaine moyenne entre les valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire une quantité comprise entre m et M.

Quand $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), cette fonction prend la valeur μ en un point ξ de l'intervalle (nº 27, VI) et l'on peut aussi écrire

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)\,(b-a).$$

218. Partage de l'intervalle d'intégration. — Théorème. *Si l'on partage l'intervalle* (a, b) *en deux autres par un point intermédiaire* c, *on a la relation*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Observons d'abord que si l'on partage un des intervalles $\delta_1, \delta_2, \dots$, par exemple δ_i, en deux autres δ_i' et δ_i'' par l'addition d'un nouveau point de subdivision, la somme $\Sigma m_i \delta_i$ augmentera (si elle change), car le terme $m_i \delta_i$ sera remplacé par une somme $m_i' \delta_i' + m_i'' \delta_i''$ au moins égale (puisque m_i et m_i'' sont $\geqslant m_i$).

Ceci entendu, montrons que les deux membres de l'équation (2) ont la même définition.

Le premier membre est la borne supérieure de toutes les sommes $\Sigma m\delta$ étendues de a à b (nº 216) ; le second est la borne supérieure des sommes analogues quand on s'astreint à prendre c comme point de subdivision. Mais cette restriction est sans conséquence, car toute somme $\Sigma m\delta$ étendue de a à b ne surpasse pas celle qu'on en déduit en prenant en plus c comme point de subdivision.

Remarque. — Le théorème précédent se généralise de proche en proche : *Si l'on partage l'intervalle* (a, b) *en plusieurs autres, l'intégrale dans l'intervalle entier est la somme des intégrales dans chaque partie.*

219. Définition usuelle de l'intégrale définie. — Partageons l'intervalle (a, b) en intervalles consécutifs d'amplitudes δ_i, désignons par M_i et m_i les bornes supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle δ_i et formons les deux sommes :

$$\Sigma\, m_i \delta_i, \qquad \Sigma\, M_i \delta_i,$$

étendues à tous les intervalles δ_i. Nous allons démontrer le théorème suivant, qui fournit la définition usuelle de l'intégrale définie :

Théorème. — *L'intégrale*

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

est comprise entre les deux sommes $\Sigma m_i \delta_i$ *et* $\Sigma M_i \delta_i$ *et est leur limite commune quand tous les intervalles* δ_i *tendent vers zéro.*

En effet, en vertu du théorème précédent (nº 218), l'intégrale dans (a, b) est la somme des intégrales dans chaque intervalle δ_i, c'est-à-dire la somme des intégrales prises entre deux points de subdivision consécutifs x_i et x_{i+1}. On a donc

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Sigma \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx.$$

Le second membre est compris entre $\Sigma m_i \delta_i$ et $\Sigma M_i \delta_i$, car le théorème de la moyenne (n° 217) s'applique à chaque intégrale, ce qui prouve la première partie du théorème.

Pour établir la seconde, il reste à montrer que la différence de ces deux sommes, à savoir

$$\sum_i (M_i - m_i)\,\delta_i,$$

tend vers zéro avec tous les intervalles δ_i. La conclusion est immédiate si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), car les oscillations $M_i - m_i$ deviennent toutes inférieures à tout nombre donné ε quand les intervalles δ_i deviennent tous suffisamment petits (n° 27, IV), et la somme $\Sigma (M_i - m_i)\,\delta_i$ est alors moindre que $\varepsilon\Sigma\delta_i$ ou $\varepsilon (b - a)$, quantité aussi petite que l'on veut avec ε. Cette somme tend donc vers zéro.

Cette conclusion subsiste, si $f(x)$, restant bornée, possède un nombre limité de points de discontinuité entre a et b. En effet, donnons-nous un nombre positif ω arbitrairement petit. Les oscillations $M_i - m_i$ deviendront, comme ci-dessus, inférieures à ε dans tous les intervalles δ_i qui restent à une distance $> \omega$ des points de discontinuité, et sont, par suite, intérieurs à des intervalles fixes où la fonction est continue. La partie correspondante de la somme $\Sigma (M_i - m_i)\,\delta_i$ aura donc pour limite zéro.

La somme des autres intervalles δ_i et, avec elle, l'autre partie de la somme $\Sigma (M_i - m_i)\,\delta_i$ peuvent être supposées aussi petites que l'on veut avec ω, puisqu'il n'y a qu'un nombre limité de points de discontinuité. La limite de la somme complète ne peut donc encore être que zéro.

220. Autres limites de sommes qui peuvent servir de définition à l'intégrale définie. — Il est souvent utile de considérer l'intégrale définie comme limite d'expressions différentes des précédentes. Supposons $f(x)$ intégrable dans l'intervalle (a, b) et partageons encore cet intervalle par les points $x_1 = a, x_2, \dots x_i, \dots x_{n+1} = b$ en parties d'amplitudes δ_i. On aura

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\delta_i,$$

le point ξ_i étant choisi arbitrairement dans l'intervalle δ_i et tous les intervalles δ_i tendant vers zéro. En effet, $f(\xi_i)$ étant compris

entre les bornes M_i et m_i, la somme précédente est comprise entre les deux expressions $\Sigma M_i \delta_i$ et $\Sigma m_i \delta_i$, qui ont toutes deux pour limite l'intégrale définie, donc elle a la même limite.

On peut choisir, en particulier, $\xi_i = x_i$ et écrire $\delta_i = dx_i$; il vient alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i) dx_i.$$

Ainsi l'intégrale définie peut être considérée comme *la limite d'une somme de différentielles.* C'est même là le premier point de vue auquel on s'est placé pour la définir. Aussi c'est dans la relation précédente que l'on trouve l'origine de la notation de l'intégrale définie et, en particulier, du signe $\int$ qui représente une limite de sommes.

221. Cas où a **est** $> b$. — Nous avons supposé jusqu'ici $a < b$, mais la définition de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

comme limite de sommes et ses conséquences subsistent pour $a > b$. Seulement, comme les points de subdivision x_i sont supposés numérotés dans le sens de a vers b, toutes les différences $x_{i+1} - x_i = \delta_i$ deviennent maintenant négatives et les amplitudes des intervalles élémentaires sont $-\delta_i$. Ecrivons donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \Sigma\, M_i \delta_i = -\lim \Sigma\, M_i\,(-\delta_i)\,;$$

nous avons, par la définition antérieure, b étant $< a$,

$$\lim \Sigma\, M_i\,(-\delta_i) = \int_b^a f(x)\,dx\,;$$

par conséquent,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Donc *intervertir les limites d'une intégrale définie revient à changer son signe.*

Remarque. — Ce théorème permet d'écrire l'équation (2) du nº 218 sous la forme suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0.$$

comme on a en géométrie $ab + bc + ca = 0$ en vertu du principe des signes. Sous cette forme, l'équation est symétrique en a, b, c. Par conséquent, elle subsiste quelle que soit la situation respective de ces trois points. Elle suppose seulement la fonction intégrable (n° 216) dans tous les intervalles considérés.

222. Signification géométrique de l'intégrale définie. — L'intégrale définie est susceptible d'une interprétation géométrique. Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) ; considérons la courbe qui a pour équation en coordonnées rectangulaires

$$y = f(x)$$

et supposons, pour fixer les idées, que son ordonnée soit positive. Proposons-nous de définir et d'évaluer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux droites $x = a$ et $x = b$.

Partageons cette aire en segments élémentaires par des parallèles à l'axe des y d'abscisses successives $x_2, x_3, \ldots x_n$ menées entre les droites extrêmes $x = a$ (ou x_1) et $x = b$ (ou x_{n+1}). Un segment quelconque de base $x_{i+1} - x_i$ (ou δ_i) est compris entre deux rectangles, l'un inscrit dans le segment et l'autre circonscrit. Le premier a pour hauteur le minimé m_i de $f(x)$ entre x_i et x_{i+1}, l'autre le maximé M_i entre les mêmes points. Leurs mesures sont $m_i\delta_i$ et $M_i\delta_i$. Donc l'aire à évaluer est comprise entre la somme $\Sigma m_i\delta_i$ des rectangles inscrits et celle $\Sigma M_i\delta_i$ des rectangles circonscrits. Comme ces deux sommes tendent vers la même limite quand tous les segments tendent vers 0, cette limite commune peut servir de définition et de mesure à l'aire que nous nous sommes proposés d'évaluer. Cette aire est donc égale à l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Telle est l'interprétation géométrique annoncée : *Une intégrale définie représente une aire plane.*

223. Intégrale considérée comme fonction de sa limite supérieure ; sa dérivée. — Remplaçons la limite supérieure b de l'intégrale définie par une variable X, nous formons une fonction de X :

$$F(X) = \int_a^X f(x)\,dx.$$

Cette fonction jouit des propriétés fondamentales suivantes :

La fonction F(X) *est continue dans tout intervalle où* $f(X)$ *est intégrable.*

En effet, pour un accroissement h de signe quelconque donné à X, on a (n° 221)

$$\int_a^{X+h} f(x)\,dx = \int_a^X + \int_X^{X+h} f(x)\,dx\,;$$

donc, par le théorème de la moyenne (n° 217),

$$F(X+h) - F(X) = \int_X^{X+h} f(x)\,dx = \mu h,$$

où μ est une valeur moyenne de $f(x)$ dans l'intervalle de X à $X+h$. Cette relation prouve que $F(X+h) - F(X)$ tend vers zéro avec h, donc F(X) est fonction continue de X.

Supposons maintenant que $f(X)$ soit continue au point X ; la valeur moyenne μ tendra vers $f(X)$ quand h tendra vers zéro, et l'on tirera de la dernière équation

$$F'(X) = \lim_{h=0} \frac{F(X+h) - F(X)}{h} = \lim \mu = f(X).$$

De là, le théorème fondamental suivant :

La dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa limite supérieure est égale à la valeur de la fonction sous le signe d'intégration à cette limite, pourvu que cette fonction soit continue en ce point.

224. Autres propriétés des intégrales définies. — I. Si $f(x)$ se décompose en une somme de fonctions intégrables (n° 216), à savoir $\varphi(x) + \psi(x) + \cdots$, la fonction $f(x)$ est intégrable et l'on a

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx + \cdots$$

C'est la *règle d'intégration par décomposition* pour les intégrales définies. Elle se démontre facilement au moyen de la définition de l'intégrale donnée au n° 220. En effet, on a

$$\Sigma f(\xi_i)\,\delta_i = \Sigma\,\varphi(\xi_i)\,\delta_i + \Sigma\,\psi(\xi_i)\,\delta_i + \cdots$$

Faisons tendre les δ_i vers zéro et passons à la limite ; par définition, l'équation précédente sera remplacée par l'équation (1).

II. *Un facteur constant peut être mis hors du signe d'intégration.*

Soit, en effet, A constant ; on a, par définition (n° 220),

$$\int_a^b \mathrm{A}\, f(x)\, dx = \lim \Sigma\, \mathrm{A}\, f(\xi_i)\, \delta_i = \mathrm{A} \lim \Sigma\, f(\xi_i)\, \delta_i\ ;$$

$$(2) \qquad \int_a^b \mathrm{A}\, f(x)\, dx = \mathrm{A} \int_a^b f(x)\, dx.$$

225. Théorème de la moyenne. — Considérons l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

et supposons que la fonction à intégrer soit le produit de deux fonctions intégrables, l'une $\varphi(x)$ constamment positive dans l'intervalle (a, b) et l'autre $f(x)$ comprise entre m et M. On aura, si b est $> a$,

$$\int_a^b [\mathrm{M} - f(x)]\, \varphi(x)\, dx > 0, \qquad \int_a^b [f(x) - m]\, \varphi(x)\, dx > 0.$$

car, les fonctions à intégrer étant positives, ces intégrales sont des limites de sommes positives. On peut décomposer ces intégrales en deux autres et faire sortir les constantes M et m du signe d'intégration (n° 224) ; il vient ainsi, sans difficulté,

$$\mathrm{M} \int_a^b \varphi(x)\, dx > \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx > m \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Donc, en désignant par μ une moyenne convenable entre les valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), on peut écrire

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

C'est dans cette relation que consiste le *théorème de la moyenne*. Nous l'avons établie en supposant $b > a$ et $\varphi(x)$ positif, mais elle subsiste évidemment *pourvu que* $\varphi(x)$ *ne change pas de signe dans l'intervalle* (a, b).

Quand $f(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a, b), on peut remplacer μ par $f(\xi)$, où ξ est une valeur convenable de x dans cet intervalle, et écrire l'équation (3) sous la forme suivante :

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

En faisant $\varphi(x) = 1$ dans les formules (3) et (4), on retrouve celles du n° 217 :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu \int_a^b dx = \mu\,(b-a),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b dx = f(\xi)\,(b-a).$$

§ 2. Relation entre les intégrales définies et indéfinies. Calcul des intégrales définies.

226. Retour sur le chapitre précédent : Existence d'une fonction ayant pour dérivées $f(x)$. Remarques sur les notations. — Dans tout le chapitre V, on a admis provisoirement le résultat suivant, énoncé au nº 183 : *Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), il existe une fonction ayant $f(x)$ pour dérivée dans cet intervalle.* Ce théorème se trouve maintenant rigoureusement établi. En effet, l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

est une fonction particulière qui jouit de cette propriété (nº 223). Lorsqu'il n'en résulte aucune confusion, on remplace habituellement la variable y par x dans la notation de l'intégrale précédente, qui devient

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

Cette expression a donc pour dérivée la fonction $f(x)$ écrite sous le signe d'intégration. Cette propriété commune des intégrales indéfinie et définie :

$$\int f(x)\,dx, \qquad \int_a^x f(x)\,dx,$$

explique l'origine du signe $\int$ dans la notation de la première.

227. Relation fondamentale pour le calcul des intégrales définies. — Lorsque, par un procédé quelconque, on a trouvé une fonction continue $F(x)$ qui admet $f(x)$ pour dérivée dans l'intervalle (a, b), cette fonction ne peut différer que par une constante de l'intégrale définie considérée ci-dessus, car ces deux fonctions ont la même dérivée. Il vient donc, C désignant une constante à déterminer,

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C.$$

En particulier, si $x = a$, on trouve $0 = F(a) + C$, d'où l'on tire $C = -F(a)$; par conséquent,

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a) ;$$

et, si l'on fait $x = b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

C'est la *formule fondamentale* pour le calcul des intégrales définies. On la met souvent sous la forme plus condensée

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b. \tag{2}$$

Le second membre se prononce en abrégé : $F(x)$ aux limites a et b. Il représente l'accroissement éprouvé par la fonction continue $F(x)$ quand x passe de a à b, ce que nous appellerons *la différence de* $F(x)$ *dans l'intervalle* (a, b). De là, le théorème suivant :

L'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$, *prise entre deux limites entre lesquelles* $f(x)$ *est continue, est égale à l'accroissement d'une fonction continue* $F(x)$ *ayant* $f(x)$ *pour dérivée, quand* x *passe de* a *à* b.

228. Sur la manière d'employer le théorème précédent. — Le théorème précédent est fondamental. Il ramène le calcul de l'intégrale définie à celui de l'intégrale indéfinie, auquel s'appliquent toutes les méthodes exposées dans le chapitre V.

En effet, l'intégrale indéfinie a pour dérivée $f(x)$ par définition, et l'équation (2) peut s'écrire

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b. \tag{3}$$

L'intégrale indéfinie comporte une constante arbitraire, mais on peut la négliger pour le calcul de l'intégrale définie, car le théorème précédent s'applique à toute fonction ayant pour dérivée $f(x)$.

Lorsque la fonction $F(x)$ est à déterminations multiples, le choix des valeurs à attribuer à $F(a)$ et $F(b)$ dans la formule (1) résulte de la condition de continuité imposée à $F(x)$. En géné-

ral, on pourra choisir arbitrairement la détermination de $F(a)$, mais alors celle de $F(b)$ est imposée, car il faut que $F(x)$ varie d'une manière continue de $F(a)$ à $F(b)$ quand x varie de a à b.

Cette remarque s'applique, en particulier, aux inverses des fonctions circulaires. On a, par exemple,

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } b - \text{arc tg } a\ ;$$

mais les valeurs arc tg a et arc tg b doivent appartenir à la même branche de la fonction. Le plus simple est donc de considérer la branche principale. Si l'on fait $a = 0$ et $b = 1$, il vient ainsi

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^6} = \left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

229. Remarque sur la définition de l'intégrale définie. — Certains auteurs prennent la relation (3),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b,$$

comme définition de l'intégrale définie, et considèrent comme une propriété l'égalité de cette expression avec une limite de sommes. Ce mode d'exposition peut paraître plus simple à première vue, mais cette simplicité est plus apparente que réelle. En effet, cette définition postule l'existence d'une fonction ayant pour dérivée $f(x)$, et celle-ci ne peut être établie d'une manière générale que par la considération d'une limite de sommes.

230. Intégration par décomposition et par parties. — Les règles d'intégration par décomposition, par parties et par substitution s'étendent aux intégrales définies, mais avec des modifications tenant aux limites.

Si $u, v, w,\ldots$ sont des fonctions intégrables de x (nº 216), on a

$$(4)\qquad \int_a^b (u + v - w + \cdots)\,dx = \int_a^b u\,dx + \int_a^b v\,dx - \int_a^b w\,dx + \cdots$$

C'est la *règle d'intégration par décomposition,* déjà démontrée (nº 224).

Si u et v sont des fonctions de x ayant des dérivées intégrables u' et v' dans l'intervalle (a, b), uv a pour dérivee $uv' + v'u$; on a donc

$$\int_a^b (uv' + u'v)\,dx = \Big[uv\Big]_a^b$$

et, par la règle précédente,

$$(5) \qquad \int_a^b uv'\,dx = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b vu'\,dx.$$

C'est la *règle d'intégration par parties*. On peut l'écrire, en abrégé,

$$\int_a^b u dv = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du,$$

en sous-entendant que les limites sont relatives à x.

231. Intégration par substitution. — Cette règle exige un peu plus d'attention. Soit $f(x)$ une fonction continue de x dans l'intervalle (a, b) ; posons

$$x = \varphi(t)$$

et supposons : 1° que, quand t varie de t_1 à T, $\varphi(t)$ varie d'une manière continue de a à b ; 2° que $\varphi(t)$ ait une dérivée continue $\varphi'(t)$ dans l'intervalle (t_1, T) ; 3° que $f[\varphi(t)]$ soit aussi continue dans cet intervalle. Cette dernière condition résultera d'ailleurs des précédentes si $\varphi(t)$ reste compris entre a et b, mais nous ne faisons pas cette hypothèse. Je dis qu'on aura

$$(6) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

C'est la *formule d'intégration par substitution*. Pour la démontrer, considérons les deux fonctions de t :

$$\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t)} f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_{t_1}^{t} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Elles ont même dérivée. La dérivée de la seconde est la fonction sous le signe d'intégration (n° 223). Celle de la première s'obtient par la règle des fonctions de fonctions : on calcule d'abord la dérivée de cette intégrale par rapport à sa limite supérieure $\varphi(t)$, ce qui donne $f[\varphi(t)]$, puis on multiplie ce résultat par la dérivée de $\varphi(t)$. On trouve dans les deux cas $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$.

Les deux intégrales, ayant même dérivée, ne diffèrent que par une constante ; elle s'annulent toutes deux pour $t = t_1$, donc elles sont égales. En particulier, si $t = \mathrm{T}$, il vient

$$(7) \qquad \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(\mathrm{T})} f(x)\,dx = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Cette équation revient à (6), car $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(\mathrm{T}) = b$.

Cas où il y a des discontinuités. — Plus généralement, la formule (6) subsiste si la fonction $\varphi(t)$ est continue et si les fonctions $f[\varphi(t)]$ et $\varphi'(t)$ sont bornées dans l'intervalle de t_1 à T et n'ont, dans cet intervalle, qu'un nombre limité de points de discontinuité.

En effet, on peut partager l'intervalle (t_1, T) en parties consécutives dans lesquelles il n'y ait de discontinuités qu'à l'une des limites, et il suffit de démontrer que la formule (7) s'applique dans chaque partie, car, en additionnant les résultats, elle s'étend à l'intervalle entier.

Nous pouvons donc admettre qu'il n'y ait de discontinuité qu'à la limite supérieure T, auquel cas nous avons (sans difficulté, quelque petit que soit ε positif)

$$\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(\mathrm{T}-\varepsilon)} f(x)\,dx = \int_{t_1}^{\mathrm{T}-\varepsilon} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\,;$$

et, à la limite pour $\varepsilon = 0$, cette équation revient à (7) et, par suite, à (6).

232. Intégrales définies généralisées. — La définition de l'intégrale définie suppose les limites a et b finies et la fonction $f(x)$ bornée dans l'intervalle (a, b). Si ces conditions n'ont pas lieu, il faut de nouvelles définitions.

1° Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable (n° 216) dans l'intervalle (a, x'), quel que soit x', pourvu que x' soit $> a$. L'intégrale de $f(x)\,dx$ prise entre les limites a et ∞ est, par définition, la limite, si elle existe, de l'intégrale prise entre a et x' quand x' tend vers l'infini et c'est *une intégrale généralisée*. On a donc

$$(8) \qquad \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x'=\infty} \int_a^{x'} f(x)\,dx.$$

Si cette limite n'existait pas, l'intégrale à limite infinie n'existerait pas non plus. L'existence de l'intégrale à limite infinie n'est pas assurée, même quand $f(x)$ est continue. Cer-

taines règles permettent, dans des cas étendus, de constater si l'intégrale à limite infinie est déterminée ou non. Nous nous en occuperons dans une autre partie du cours. Pour le moment, contentons-nous de remarquer que, si l'intégration indéfinie peut être effectuée, la définition de l'intégrale généralisée suffit pour s'assurer de son existence et la calculer. Par exemple,

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{x'=\infty} \int_0^{x'} e^{-x}\, dx = \lim_{x'=\infty} \Big[1 - e^{-x} \Big]_0^{x'} = 1.$$

Les intégrales prises entre les limites $-\infty$ et b, ou entre $-\infty$ et $+\infty$ s'interprètent d'une manière analogue.

2° Soit maintenant $f(x)$ une fonction qui croît à l'infini quand x tend vers b, mais est bornée et intégrable dans l'intervalle $(a, b-\varepsilon)$, quelque petit que soit ε. On pose par définition, a étant donc supposé $< b$,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx. \tag{9}$$

L'existence de *l'intégrale généralisée* est liée à celle de cette limite. Lorsque l'intégration indéfinie peut être effectuée, cette définition suffit pour le calcul, on a, par exemple,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

3° Si $f(x)$ augmentait indéfiniment quand x tend vers a, mais était bornée et intégrable dans l'intervalle $(a+\varepsilon, b)$ quelque petit que fût ε, on poserait d'une manière analogue

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx, \tag{10}$$

et l'existence de l'intégrale serait liée à celle de cette limite.

4° Supposons enfin que $f(x)$ devienne infinie pour un nombre limité de valeurs de x dans l'intervalle (a, b). Partageons cet intervalle en parties consécutives où $f(x)$ n'est infinie qu'à l'une des limites. L'intégrale de $f(x)\,dx$ dans (a, b) sera, par définition, la somme des intégrales dans chaque partie. Pour que l'*intégrale généralisée* existe dans l'intervalle (a, b), il faut donc qu'elle existe dans chaque partie, ce qui ramène aux définitions précédentes.

233. Extension de la formule fondamentale (1) au calcul des intégrales généralisées. — I. Lorsque la fonction $f(x)$ est continue pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (a, b), sauf pour un nombre limité de *valeurs exceptionnelles* qui peuvent la rendre infinie, l'équation fondamentale (1) pour le calcul des intégrales définies (n° 227), à savoir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a),$$

subsiste pour l'intégrale généralisée, pourvu que la fonction $\mathrm{F}(x)$ soit continue dans tout l'intervalle (a, b) sans exception, et qu'elle ait $f(x)$ pour dérivée sauf pour les valeurs exceptionnelles.

En effet, si b est la seule valeur exceptionnelle, l'équation (9) donne

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\,[\mathrm{F}(b-\varepsilon) - \mathrm{F}(a)] = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

La conclusion est analogue, si a est la seule valeur exceptionnelle. S'il y a une valeur exceptionnelle c intermédiaire entre a et b, il vient

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c + \int_c^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(a) + \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(c).$$

Comme $\mathrm{F}(c)$ disparaît, on retrouve encore la même équation. Enfin la démonstration s'étend de proche en proche au cas où il y aurait plusieurs valeurs exceptionnelles intermédiaires.

II. Si les fonctions $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ sont continues pour toutes les valeurs de x supérieures à a, et si $\mathrm{F}(x)$ tend vers une limite déterminée $\mathrm{F}(\infty)$ quand x tend vers l'infini, l'équation fondamentale,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \mathrm{F}(\infty) - \mathrm{F}(a),$$

subsiste encore, car, en appliquant l'équation (8), il vient

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\,[\mathrm{F}(x') - \mathrm{F}(a)] = \mathrm{F}(\infty) - \mathrm{F}(a).$$

234. Application au calcul de quelques intégrales définies. — Indiquons quelques applications de la formule fondamentale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b.$$

I. Si a est différent de 0, on a

$$\int_0^\pi \cos ax\, dx = \left[\frac{\sin ax}{a}\right]_0^\pi = \frac{\sin a\pi}{a};$$

donc, si a est entier et différent de 0,

$$\int_0^\pi \cos ax\, dx = 0.$$

On conclut de là que, si m et n sont des entiers différents,

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(m+n)x\, dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(m-n)x\, dx = 0;$$

tandis que, si $m = n$,

$$\int_0^\pi \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 + \cos 2mx)\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

II. De la relation du n° 188 :

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{bx}{a} + C,$$

on déduit

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\Big[\operatorname{arc\,tg} \infty - \operatorname{arc\,tg} 0\Big] = \frac{\pi}{2ab}.$$

III. De la relation du même numéro :

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2ab} \operatorname{Log} \frac{a - bx}{a + bx} + C,$$

on déduit (a, b étant positifs et $a > b$)

$$\int_0^1 \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2ab} \operatorname{Log} \frac{a + b}{a - b}.$$

IV. Si $(a + b)$ et $(a - b)$ sont positifs, on a (n° 209)

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}\ \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C,$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\Big[\operatorname{arc\,tg} \infty - \operatorname{arc\,tg} 0\Big] = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Si, au contraire, $a + b$ est > 0 et $a - b < 0$, on a

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Log}\left(\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x}\right) + C,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{Log}\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right)$$

V. Des deux relations du n° 213, à savoir

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C,$$

on déduit, a étant positif,

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

235. Intégrales obtenues par des formules de reduction. — I. Les formules de réduction se simplifient souvent quand on les applique aux intégrales définies. Ainsi, de la formule

$$\int x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx,$$

on conclut, si n est positif,

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

Si, de plus, n est entier, cette formule donne, de proche en proche,

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!\int_0^\infty e^{-x}\,dx = n!$$

II. Lorsque m et n sont des entiers positifs, les formules de réduction (3) et (4) du n° 210 donnent les deux suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{m-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\cos^n x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{n-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^{n-2} x\,dx.$$

La première subsiste pour $n=0$ et la seconde pour $m=0$, auxquels cas il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx.$$

Ces quatre formules permettent de réduire de proche en

proche les exposants m et n à 0 ou à 1, donc les intégrales à l'une des quatre suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\, dx,$$

ayant respectivement pour valeurs $\frac{\pi}{2}$, 1, 1 et $\frac{1}{2}$.

Pour abréger l'écriture, convenons de représenter par $m\,!!$ le produit de tous les entiers non supérieurs à m mais de même parité que m (ce que nous pouvons appeler une *semi-factorielle*). Il viendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m\,!!}\dfrac{\pi}{2} & (m \text{ pair}), \\[2ex] \dfrac{(m-1)!!}{m\,!!} & (m \text{ impair}). \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)\,!!\,(n-1)\,!!}{(m+n)\,!!}\dfrac{\pi}{2} & (m \text{ et } n \text{ pairs}), \\[2ex] \dfrac{(m-1)\,!!\,(n-1)\,!!}{(m+n)\,!!} & \left(\begin{array}{l} m \text{ ou } n \text{ ou tous} \\ \text{deux impairs.} \end{array}\right) \end{cases}$$

Lorsque m et n sont impairs, soit $m = 2p + 1$, $n = 2q + 1$, la formule précédente se simplifie,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x \cos^{2q+1} x\, dx = \frac{1}{2}\frac{p\,!\,q\,!}{(p+q+1)\,!}.$$

236. Exemples de changements de variables. — I. Par la substitution $x = \operatorname{tg} z$, il vient, eu égard aux résultats précédents (m entier et positif),

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-2} z\, dz = \frac{(2m-3)\,!!}{(2m-2)\,!!}\frac{\pi}{2}.$$

II. Par la substitution $x = \sin z$, il vient (m entier positif)

$$\int_0^1 (1-x^2)^m\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} z\, dz = \frac{(2m)\,!!}{(2m+1)\,!!}.$$

III. Par la substitution $x = \sin z$, il vient (m entier positif)

$$\int_0^1 \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m z\, dz = \begin{cases} \dfrac{(m-1)\,!!}{m\,!!}\dfrac{\pi}{2} & (m \text{ pair}), \\[2ex] \dfrac{(m-1)\,!!}{m\,!!} & (m \text{ impair}). \end{cases}$$

IV. Par la substitution $\sqrt{ax - x^2} = xz$, d'où $x = a : (1 + z^2)$, il vient (m entier positif)

$$\int_0^a \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}} = 2a^m \int_0^\infty \frac{dz}{(1 + z^2)^{m+2}} = \frac{(2m - 1)\,!!}{(2m)\,!!} \pi a^m.$$

V. Par la substitution $x = \sin^2 z$, il vient (p, q entiers positifs)

$$\int_0^1 x^p (1 - x)^q \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} z \cos^{2q+1} z \, dz = \frac{p\,!\,q\,!}{(p + q + 1)}.$$

VI. Par la substitution $x = z : (1 + z)$, la même intégrale se transforme dans

$$\int_0^\infty \frac{z^p \, dz}{(1 + z)^{p+q+2}} = \frac{p\,!\,q\,!}{(p + q + 1)!}$$

237. Formule de Wallis. — Soient n un nombre entier positif et x une variable comprise entre 0 et $\pi : 2$; on a

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

par conséquent,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx$$

et, en remplaçant les intégrales par leurs valeurs numériques,

$$\frac{(2n)\,!!}{(2n + 1)\,!!} < \frac{(2n - 1)\,!!}{(2n)\,!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n - 2)\,!!}{(2n - 1)\,!!}.$$

On déduit de ces inégalités

$$\left[\frac{(2n)\,!!}{(2n - 1)\,!!}\right]^2 \frac{1}{2n + 1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)\,!!}{(2n - 1)\,!!}\right]^2 \frac{1}{2n};$$

donc, θ étant compris entre 0 et 1,

$$\frac{\pi}{2} = \left[\frac{(2n)\,!!}{(2n - 1)\,!!}\right]^2 \frac{1}{2n + \theta}.$$

Faisant tendre n vers l'infini, et observant que $(2n) : (2n + \theta)$ tend vers l'unité, on obtient la *formule de Wallis*

$$\pi = \lim_{n=\infty} \left[\frac{(2n)\,!!}{(2n - 1)\,!!}\right]^2 \frac{1}{n}.$$

238. Intégrales obtenues par des artifices de calcul. Exemples. — L'intégration indéfinie est le procédé le plus important pour

calculer les intégrales définies, mais ce n'est pas le seul. Certaines intégrales définies se déterminent par des artifices de calcul, sans qu'il soit possible d'obtenir sous forme finie les intégrales indéfinies correspondantes.

I. Un des exemples les plus remarquables est fourni par l'intégrale généralisée

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

qui joue un rôle important en calcul des probabilités. Pour la calculer, établissons d'abord quelques inégalités.

La fonction $(1+\alpha)e^{-\alpha}$, ayant sa dérivée $-\alpha e^{-\alpha}$ de signe contraire à α, atteint son maximé (qui est 1) pour $\alpha = 0$. Nous avons donc, en remplaçant α par $\pm x^2$,

$$(1+x^2)e^{-x^2} < 1, \qquad (1-x^2)\,e^{x^2} < 1;$$

d'où les deux inégalités

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}.$$

Elevons-les à la puissance positive n, en supposant $1 - x^2$ positif dans la première, nous trouverons

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Comme nous avons

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx > \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx,$$

nous tirons des inégalités précédentes, pour n entier (n° 236),

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \sqrt{n}\,\frac{(2n-3)\,!!}{(2n-2)\,!!}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx > \sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \sqrt{n}\,\frac{(2n)\,!!}{(2n+1)\,!!}.$$

Ces deux résultats peuvent aussi s'écrire comme il suit :

$$\frac{n}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\right] < \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \frac{\pi}{2}\,\frac{2n}{2n-1}\left[\frac{(2n-1)\,!!}{(2n)\,!!}\,\sqrt{n}\right]$$

Faisons tendre n vers l'infini ; ces deux crochets tendent respectivement vers $\sqrt{\pi}$ et $1 : \sqrt{\pi}$ par la formule de Wallis, donc les deux membres extrêmes vers $\sqrt{\pi} : 2$, et il vient

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

II. Comme second exemple, considérons l'intégrale suivante

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x \, dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \, dx}{1 + \cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x \, dx}{1 + \cos^2 x}.$$

Par la substitulion $x = \pi - z$, la dernière intégrale devient

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi - z) \sin z \, dz}{1 + \cos^2 z} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z \, dz}{1 + \cos^2 z} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z \sin z \, dz}{1 + \cos^2 z}.$$

Portons cette valeur dans l'équation précédente, nous trouvons

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x \, dx}{1 + \cos^2 x} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{1 + \cos^2 x} = \pi \Big[- \operatorname{arc\,tg} (\cos x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

III. Considérons, en dernier lieu, l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Log} (\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{Log} (\sin x) \, dx.$$

Nous avons, d'une part,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Log} (\sin x) \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x) \, dx,$$

car, par la substitution $x = \pi - z$, l'intégrale aux limites $\pi : 2$ et π se transforme dans celle aux limites 0 et $\pi : 2$.

D'autre part, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, donc, en prenant les logarithmes et intégrant, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \operatorname{Log}(\sin x) dx &= \pi \operatorname{Log} 2 + \int_0^{\pi} \operatorname{Log}\left(\sin \frac{x}{2}\right) dx + \int_0^{\pi} \operatorname{Log}\left(\cos \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \pi \operatorname{Log} 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x) \, dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\cos x) dx \\ &= \pi \operatorname{Log} 2 + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x) \, dx, \end{aligned}$$

car les deux intégrales aux limites 0 et $\pi : 2$ se ramènent l'une à l'autre par la substitution $x = (\pi : 2) - z$ et sont, par conséquent, égales.

De la comparaison des valeurs obtenues de part et d'autre, nous tirons, en réduisant, la valeur de l'intégrale cherchée (Euler) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} (\sin x) \, dx = - \frac{\pi}{2} \operatorname{Log} 2.$$

§ 3. Intégrale de Riemann.

L'intégrale de Riemann fournit la généralisation la plus directe de la théorie élémentaire des intégrales définies, mais elle n'a plus guère qu'une importance historique, car elle rentre comme cas particulier dans celle de Lebesgue, qui sera étudiée dans le chapitre suivant.

239. Théorème de M. Darboux. — Soient $f(x)$ une fonction univoque et bornée dans un intervalle (a, b), M et m ses bornes supérieure et inférieure. Partageons l'intervalle (a, b) en n parties consécutives par les points :

$$x_1 = a, x_2, x_3, \dots x_i, \dots x_n, x_{n+1} = b.$$

Désignons, en général, par $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ l'amplitude d'un de ces intervalles, par M_i et m_i les bornes supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle δ_i. Formons les deux sommes :

$$S = \sum_1^n M_i \, \delta_i, \qquad s = \sum_1^n m_i \, \delta_i.$$

Ces deux sommes sont comprises entre $m(b-a)$ et $M(b-a)$. Voici maintenant le théorème de M. Darboux :

Théorème. — *Si l'on multiplie indéfiniment le nombre des points de subdivision, de manière que tous les intervalles δ_i tendent vers 0, les deux sommes S et s tendront respectivement vers des limites déterminées, L et l, indépendantes du mode de subdivision adopté.*

Il suffit de faire la démonstration pour S, car S est remplacé par $-s$ quand f est remplacé par $-f$. Ensuite on peut supposer $f > 0$; en effet, si A est une constante, les sommes S relatives à f ne diffèrent des sommes correspondantes relatives à $f + A$ que par une constante $A(b-a)$, de sorte que le théorème sera vrai pour f s'il est vrai pour $f + A$ et on peut prendre A assez grand pour que $f + A$ soit positif.

Supposant f positif, faisons encore une observation préliminaire : si l'on partage un intervalle δ_i en sous-éléments $\delta'_i, \delta''_i, \dots$ où les bornes supérieures de f sont $M'_i, M''_i, \dots$ le produit $M_i \delta_i$ ne sera pas inférieur à la somme $M'_i \delta'_i + M''_i \delta''_i + \dots$ étendue aux sous-éléments de δ_i, ni *à fortiori* (les termes étant positifs) à toute somme analogue qui ne s'étendrait qu'à une partie seulement de ces sous-éléments.

Démontrons maintenant le théorème de M. Darboux.

Toute somme S est $> m(b-a)$; l'ensemble des sommes possibles admet donc une borne inférieure L. *Je dis que* S *a pour limite* L *quand les éléments δ_i tendent vers* 0.

En effet, soit ε un nombre positif arbitraire. Par définition de L, il existe une somme fixe S', fournie par un certain mode de partage en éléments déterminés δ', telle qu'on ait $S' < L + \varepsilon$. Considérons main-

tenant les éléments décroissants δ_i relatifs à la somme variable S, et partageons-les en deux classes : 1° ceux qui sont intérieurs à l'un des éléments fixes δ' ; 2° ceux qui empiètent sur plusieurs éléments δ'. En même temps, S est partagé en deux parties $S_1 + S_2$ où S_1 se rapporte aux éléments de la première classe et S_2 à ceux de la seconde. S_1 est $< S'$, car, par notre observation préliminaire, chaque terme de S' est remplacé par une somme moindre dans S_1 ; ensuite S_2 tend vers 0 avec les intervalles δ_i, car les éléments δ_i de la seconde classe sont en nombre limité (comme les intervalles fixes δ') et leur somme tend vers 0 en même temps qu'eux tous. On a donc

$$\lim S = \lim S_1 \leqslant S' < L + \varepsilon.$$

Donc, ε étant arbitraire et S au moins égal à L, la limite de S est L.

On prouve d'une manière analogue que s tend vers sa borne supérieure l.

240. Intégrales par excès et par défaut. — Fonctions intégrables au sens de Riemann. — Les deux limites L et l des sommes

$$\Sigma\, M_i \delta_i, \qquad \Sigma m_i \delta_i,$$

limites dont le théorème de M. Darboux établit l'existence, s'appellent les *intégrales par excès* et *par défaut* (JORDAN) *de* $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). On les représente par les notations

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx, \qquad \int_{\underline{a}}^b f(x)\, dx.$$

Si elles sont égales, leur valeur commune est, par définition, l'intégrale définie de $f(x)\,dx$ au sens de Riemann. Celle-ci se représente par la notation

$$(\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{ou simplement} \qquad \int_a^b f(x)\, dx.$$

On dit, dans ce cas, que la fonction $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann, ou, en abrégé, est intégrable (R) dans l'intervalle (a, b).

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit intégrable (R) est donc que la différence $L - l$ soit nulle, ou que l'on ait

$$L - l = \lim \Sigma\, (M_i - m_i)\delta_i = 0.$$

Lorsque la fonction $f(x)$ est intégrable (R) dans l'intervalle (a, b), on peut évidemment définir l'intégrale par la formule

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \delta_i,$$

les points ξ_i étant choisis d une manière arbitraire dans les intervalles δ_i de même indice.

Lorsque $f(x)$ n'est pas intégrable (R), cette limite n'existe plus, mais $\Sigma f(\xi_i)\,\delta$ a pour limites d'indétermination (plus grande et plus petite limites) les intégrales par excès et par défaut. Nous conserverons donc un sens à l'expression

$$(\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\,dx,$$

même au cas où $f(x)$ n'est pas intégrable (R), en lui attribuant une valeur indéterminée dans l'intervalle des intégrales par excès et par défaut.

Nous avons supposé jusqu'ici la tonction $f(x)$ univoque. Rien n'empêche de former des sommes analogues quand $f(x)$ est indéterminée pour certaines valeurs de x, pourvu que ses *limites d'indétermination* soient connues pour chacune de ces valeurs. On conçoit, en effet, que la fonction puisse prendre, pour chacune des valeurs de x, toutes les valeurs comprises entre ces limites. La connaissance de ces limites permet donc d'assigner aussi les bornes supérieure et inférieure de $f(x)$ dans un intervalle quelconque, donc de former les deux sommes S et s considérées au n° 239. D'ailleurs le fait de l'indétermination n'altère en rien les raisonnements, de sorte que ces deux sommes tendent encore vers des limites, qui sont les *intégrables par défaut* et *par excès* de la fonction considérée.

Si ces deux limites sont égales, la fonction $f(x)$ est *intégrable* (R) et cette limite commune se représente comme précédemment. Cette extension permet de simplifier la théorie de la réduction des intégrales multiples (Voir t. II).

241. Propriétés des fonctions intégrables (R). — I. *Soient $f(x)$ une fonction intégrable* (R) *dans l'intervalle* (a, b) *et c une constante ; la fonction $cf(x)$ est intégrable* (R) *dans le même intervalle.*

En effet, soient m_i et M_i les bornes de $f(x)$ dans l'intervalle δ_i, celles de $cf(x)$ seront cm_i et cM_i. Or on a, puisque f est intégrable,

$$\lim \Sigma\,(cM_i - cm_i)\,\delta_i = c \lim \Sigma\,(M_i - m_i)\,\delta_i = 0,$$

donc cf est intégrable aussi.

II. *La somme de plusieurs fonctions intégrables* (R) *dans* (a, b) *est intégrable* (R) *dans le même intervalle.*

Soient $f = f' + f'' + \dots$ la somme de plusieurs fonctions intégrables, m_i et M_i, m'_i et M'_i, m''_i et M''_i,... leurs bornes respectives dans δ_i. On a

$$M_i - m_i \leqslant (M'_i - m'_i) + (M''_i - m''_i) + \dots$$

Mais, f', f'',... étant intégrables dans (a, b),

$$\lim \Sigma\,(M'_i - m'_i)\delta_i + \lim \Sigma\,(M''_i - m''_i)\delta_i + \dots = 0;$$

donc *a fortiori*

$$\lim \Sigma(M_i - m_i)\,\delta_i = 0.$$

III. *Le produit de deux fonctions intégrables* (R) *dans* (a, b), *est intégrable* (R) *dans le même intervalle.*

Soit $f = f'f''$, le produit de deux fonctions intégrables et *positives*. On a, avec les notations précédentes,

$$M_i - m_i \leqslant M_i'M_i'' - m_i'm_i' \leqslant M_i''(M_i' - m_i') + m_i'(M_i'' - m_i'')$$

et, en désignant par M' et M'' les bornes supérieures de f' et de f'' dans tout intervalle d'intégration,

$$M_i - m_i \leqslant M''(M_i' - m_i') + M'(M_i'' - m_i'').$$

Donc

$$\lim \Sigma (M_i - m_i)\delta_i \leqslant M'' \lim \Sigma (M_i' - m_i') \delta_i + M' \lim \Sigma (M_i'' - m_i'') \delta_i.$$

Le second membre a pour limite 0, puisque f' et f'' sont intégrables, donc le premier *a fortiori* a pour limite 0, ce qui prouve que f est intégrable.

Le cas où f' et f'' sont de signes quelconques se ramène au précédent. On a, en effet,

$$f'f'' = (f' - m')(f'' - m'') + m'f'' + m''f' - m'm''.$$

Or le second membre est une somme de fonctions intégrables, car les deux facteurs $(f' - m')$ et $(f'' - m'')$ sont positifs et leur produit intégrable. Donc $f'f''$ est intégrable (propriété II).

IV. *Si la fonction f est intégrable* (R) *dans l'intervalle (a, b) et si ses bornes supérieure et inférieure M et m sont de même signe, la fonction* $1 : f$ *est intégrable* (R) *dans le même intervalle.*

Supposons, pour fixer les idées, M et m positifs. L'oscillation de $1 : f$ dans l'intervalle δ_i sera

$$\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i} = \frac{M_i - m_i}{M_i m_i} < \frac{1}{m^2}(M_i - m_i).$$

Par conséquent,

$$\lim \Sigma \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i} \right) \delta_i \leqslant \frac{1}{m^2} \lim \Sigma (M_i - m_i) \delta_i = 0.$$

242. Expression par une intégrale de la différence entre les intégrales par excès et par défaut. — Soit $f(x)$ une fonction bornée dans l'intervalle (a, b). Représentons par

$$\text{Osc.}\, f(x)$$

l'oscillation de $f(x)$ au point x (no 24). La relation que nous voulons établir est la suivante :

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} \text{Osc.}\, f(x)\, dx.$$

Décomposons l'intervalle (a, b) en parties consécutives δ_i et désignons par M_i et m_i les bornes supérieure et inférieure de $f(x)$ et par Δ_i la borne supérieure de Osc. $f(x)$ dans chaque intervalle δ_i. La démonstration repose sur le lemme suivant :

Quelque petit que soit ε positif, on peut trouver un mode de décomposition de (a, b) en parties δ_i aussi petites que l'on veut, tel qu'on ait dans chacune d'elles

$$M_i - m_i < \Delta_i + \varepsilon.$$

En effet, si, ε étant donné, aucun mode de décomposition de l'intervalle (a, b) ne vérifiait la condition précédente, en raisonnant comme dans la démonstration du théorème du nº 26, on prouverait qu'il existe au moins un point c dans l'intervalle (a, b), tel qu'une décomposition de l'intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ vérifiant la même condition fût impossible pour des valeurs aussi petites qu'on veut de δ. Or cette conclusion est inexacte, car, à partir d'une valeur suffisamment petite de δ, l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle $(c - \delta, c + \delta)$ sera inférieure à Osc. $f(c) + \varepsilon$.

En second lieu, on peut vérifier la condition proposée par un mode de décomposition en parties aussi petites que l'on veut. En effet, après avoir préalablement décomposé (a, b) en parties aussi petites que l'on veut, on peut encore, en vertu du raisonnement précédent, subdiviser chacune de ces parties de manière à réaliser la condition proposée.

Le lemme précédent conduit facilement à la relation à démontrer. En effet, considérons un mode de subdivision en parties δ_i vérifiant la condition de ce lemme, à savoir

$$\Delta_i \leqslant M_i - m_i < \Delta_i + \varepsilon.$$

Multiplions par δ_i et sommons pour toutes les parties, il vient

$$\Sigma\, \Delta_i\delta_i \leqslant \Sigma\, M_i\delta_i - \Sigma\, m_i\delta_i < \Sigma\, \Delta_i\delta_i + \varepsilon\,(b - a).$$

Faisons tendre à la fois δ_i et ε vers zéro ; les deux membres extrêmes de ces inégalités tendent vers la même limite, qui est, par définition, le second membre de l'équation à démontrer. Donc la limite de l'expression du milieu, qui en est le premier membre, est la même.

243. Longueur des ensembles linéaires (JORDAN) (*). — Soient E un ensemble linéaire, $e(x)$ une fonction égale à 1 en tout point de E et à 0 en tout autre point, a et b $(b > a)$ deux nombres quelconques ; formons les deux intégrales :

$$l_e E = \overline{\int_a^b} e(x)\, dx, \qquad l_i E = \underline{\int_a^b} e(x)\, dx.$$

(*) Ces notions ont perdu de leur importance depuis que MM. Borel et Lebesgue ont donné une définition plus satisfaisante de la mesure des ensembles (Introduction § 11).

La première est la *longueur extérieure* de E dans l'intervalle (a, b), la seconde sa *longueur intérieure (au sens de M. Jordan)*. Quand ces deux intégrales sont égales, leur valeur commune est la *longueur* de l'ensemble dans l'intervalle (a, b) et l'ensemble est *mesurable* dans cet intervalle *au sens de M. Jordan* ou, en abrégé, *mesurable* (J). Lorsque l'ensemble E est borné par les points a et b, on dit que les expressions précédentes sont les *longueurs* de E, sans désignation d'intervalle.

Supposons que l'on décompose l'intervalle (a, b) en parties consécutives, infiniment petites, δ_i et rappelons-nous la signification des deux intégrales précédentes, nous pourrons énoncer les propositions suivantes, qui ont été prises comme définition par M. C. Jordan :

La longueur extérieure de l'ensemble E *dans l'intervalle* (a, b) *est la limite de la somme des parties* δ_i *qui contiennent un point au moins de* E ; *la longueur intérienre la limite de la somme des parties qui ne renferment que des points de* E. *Ces limites sont indépendantes du mode de subdivision de* (a, b) *en intervalles* δ_i.

Il suit évidemment de ces nouvelles définitions que, si $l_i(\mathrm{CE})$ désigne la longueur intérieure du complémentaire de E dans l'intervalle (a, b), on aura

$$l_e\mathrm{E} + l_i(\mathrm{CE}) = b - a.$$

Appliquons aux deux intégrales qui mesurent les longueurs extérieure et intérieure de E la relation du n° 242. Il vient

$$\overline{\int_a^b} e(x)\,dx - \underline{\int_a^b} e(x)\,dx = \overline{\int_a^b} \mathrm{Osc.}\ e(x)\,dx.$$

Or Osc. $e(x)$ est égal à 1 en tout point frontière de E et à 0 partout ailleurs. D'où les propositions suivantes :

La différence entre les longueurs extérieure et intérieure d'un ensemble est égale à la longueur extérieure de l'ensemble de ses points frontières.

Pour qu'un ensemble soit mesurable (J), *il est nécessaire et suffisant que l'ensemble de ses points frontières soit de longueur nulle, ou que l'on ait*

$$\overline{\int_a^b} e(x)\,dx = 0.$$

244. Formes diverses de la condition d'intégrabilité (R). — La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction bornée, $f(x)$, soit intégrable (R) dans l'intervalle (a, b), est que les deux sommes S et s (n° 239) aient la même limite, ou que la somme essentiellement positive :

$$\mathrm{S} - s = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{M}_i - m_i)\delta_i$$

ait pour limite 0 avec tous les intervalles δ_i. Or, quand les δ_i tendent vers 0, S tend vers sa borne inférieure, s vers sa borne supérieure, donc $\mathrm{S} - s$ vers sa borne inférieure. La condition d'intégrabilité (R) est que cette borne soit nulle. Donc :

I. *Pour que $f(x)$ soit intégrable* (R) *dans l'intervalle* (a, b), *il faut et il suffit qu'à tout nombre positif* ε, *si petit qu'il soit, corresponde un mode de subdivision pour lequel on ait* $S - s < \varepsilon$.

La formule du n° 242 fournit une autre régle :

II. *La condition d'intégrabiliié* (R) *d'une fonction bornée $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) est*

$$\overline{\int_a^b} \text{Osc.} f(x)\, dx = 0.$$

Telle est, en effet. la condition d'égalité des intégrales par excès et par défaut. Elle peut être présentée sous une forme d'une vérification plus commode. A cet effet, soit ε un nombre positif quelconque. Désignons par E_ε l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) où l'oscillation de $f(x)$ est $\geqslant \varepsilon$. Cet ensemble dépend généralement de ε. La considération de l'ensemble E_ε conduit à la règle suivante :

III. *La condition d'intégrabilité* (R) *d'une fonction bornée dans l'intervalle (a, b) est que E_ε soit de longueur nulle, quel que soit* ε.

En effet, soit $e(x)$ une fonction égale à 1 en tout point de E_ε et à 0 partout ailleurs, soit $M - m$ l'oscillation de $f(x)$ dans (a, b) ; on a évidemment, pour toute valeur de x dans cet intervalle,

$$\varepsilon\, e(x) < \text{Osc.} f(x) < \varepsilon + (M - m)\, e(x).$$

Multiplions par dx et intégrons par excès entre a et b ; il vient, E^ε désignant aussi la longueur extérieure de l'ensemble E_ε,

$$\varepsilon E_\varepsilon \leqslant \overline{\int_a^b} \text{Osc.} f(x)\, dx \leqslant \varepsilon (b - a) + (M - m)\, E_\varepsilon.$$

Ces inégalités prouvent que l'intégrale ne peut être nulle que si E_ε est nul et que, réciproquement, l'intégrale sera nulle si E_ε est nul quel que soit ε.

Théorème. — *Toute fonction $f(x)$ monotone et bornée dans l'intervalle (a, b) est intégrable* (R) *dans cet intervalle.*

En effet, la somme des oscillations de $f(x)$ en tous les points de (a, b) ne pouvant surpasser la valeur absolue de $f(b) - f(a)$, le nombre de celles qui surpassent une quantité donnée ε est nécessairement limité et l'ensemble E_ε de la règle précédente est de longueur nulle.

CHAPITRE VII.

Intégrale de Lebesgue.

---

§ 1. Définition et propriétés de l'intégrale de Lebesgue.

245. Définition de l'intégrale d'une fonction bornée. — Pour obtenir l'intégrale de Riemann, on commence par partager l'intervalle d'intégration et l'on multiplie la longueur de chaque partie par une ordonnée correspondante. M. Lebesgue suit une marche inverse ; il commence par diviser l'intervalle de variation de la fonction.

Soient E un ensemble borné de mesure mE, $f(x)$ une fonction mesurable dans E (nº 82) et y admettant une borne inférieure μ et une borne supérieure M. Donnons-nous un intervalle (A, B) débordant (μ, M) et décomposons-le en parties consécutives par une *échelle* de nombres croissants :

$$l_0 = A, \; l_1, \; l_2, \ldots \; l_i, \ldots \; l_n = B.$$

Désignons par e_i l'ensemble des points de E pour lesquels on a $l_{i-1} \leqslant f < l_i$ et aussi la mesure de cet ensemble. Formons alors les deux sommes :

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i l_i, \qquad s = \sum_{1}^{n} e_i l_{i-1}.$$

Théorème. — *Si tous les degrés, $l_i - l_{i-1}$, de l'échelle tendent vers* 0, *les deux sommes* S *et* s *tendent vers une limite commune, indépendante du choix des échelons* l_i.

Cette limite est l'*intégrale de Lebesgue* et elle se désigne par les notations :

$$(L) \int_E f(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad (L) \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{(si E est un intervalle).}$$

On supprime l'indice L quand il n'y a pas de confusion possible, ce qui est le cas ordinaire.

La démonstration résulte des trois propriétés suivantes :

1º S et s sont bornés et compris entre $\mu(mE)$ et $M(mE)$.

2º La différence $S - s$ tend vers 0 avec les degrés de l'échelle. En effet, δ étant le plus grand de ces degrés $l_i - l_{i-1}$, on a

$$0 < S - s = \Sigma\, e_i(l_i - l_{i-1}) \leqslant \delta \Sigma e_i = \delta(mE).$$

3° Si l'on intercale de nouveaux échelons entre les l_i, S est stationnaire ou decroissant, s stationnaire ou croissant.

Il suit de là que S et s, étant bornés, ont une limite commune quand les degrés de l'échelle tendent vers 0 par intercalation de nouveaux échelons. Ensuite cette limite est indépendante du mode de subdivision. En effet, soient S et s deux sommes relatives à une première échelle et différant de ε au plus, S' et s' deux sommes relatives à une seconde échelle et différant de ε au plus. Les quatre sommes différeront au plus de 2ε, car les unes et les autres comprennent entre elles les deux sommes S'' et s'' relatives à une troisième échelle formée avec les échelons combinés des deux autres.

246. Propriétés des intégrales de fonctions bornées. — I. Théorème de la moyenne. — *Si $f(x)$ a pour bornes μ et M, on a immédiatement*

$$\mu\,(mE) \leqslant \int_E f\,dx \leqslant M(mE).$$

II. *Si un ensemble borné* E *est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles* $E_1, E_2, \ldots$ *sans points communs, ou bien n'ayant en commun que des ensembles de mesure nulle, l'intégrale dans* E *est la somme de celles dans* $E_1, E_2, \ldots$

Il n'y a lieu à démonstration que s'il y a une infinité d'ensembles Soit S_n l'ensemble $E_1 + E_2 + \ldots + E_n$ et soit M_1 le maximé de $|f|$. On a, sans difficulté,

$$\left| \int_E f dx - \int_{S_n} f\,dx \right| = \left| \int_{E-S_n} f\,dx \right| < M_1\, m(E - S_n).$$

Mais $m\,(E - S_n) = m\,E - m\,S_n$ et tend vers 0 pour n infini ; il vient donc, la décomposition s'appliquant à S_n,

$$\int_E f\,dx = \lim \int_{S_n} f\,dx = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \ldots$$

III. Lemme. — *Si deux fonctions mesurables f et φ diffèrent au plus de ε dans* E, *leurs intégrales dans* E *diffèrent au plus de* $\varepsilon(mE)$.

Donnons-nous une échelle de nombres l_i et définissons les ensembles e_i, par rapport à f, comme au n° précédent. Comme E est l'ensemble-somme des e_i, on a, par la propriété précédente,

$$\int_E \varphi\,dx = \sum_i \int_{e_i} \varphi\,dx.$$

Mais, dans e_i, φ est compris entre $l_{i-1} - \varepsilon$ et $l_{i+1} + \varepsilon$. Il vient donc, par le théorème de la moyenne,

$$\Sigma\, l_{i-1}\, e_i - \varepsilon\Sigma e_i < \int_E \varphi\,dx < \Sigma\, l_i e_i + \varepsilon\Sigma e_i$$

et, à la limite, les échelons tendant vers 0,

$$\int_E f\,dx - \varepsilon(mE) \leqslant \int_E \varphi\,dx \leqslant \int_E f\,dx + \varepsilon(mE).$$

IV. *L'intégrale de la somme d'un nombre limité de fonctions mesurables est égale à la somme des intégrales de ces fonctions.*

Il suffit de considérer la somme $f + \varphi$ de deux fonctions. Si elles sont toutes deux constantes dans E, le théorème est immédiat. Si elles ne sont susceptibles que d'un nombre limité de valeurs, E se partage en plusieurs parties sur lesquelles les deux fonctions sont constantes et pour lesquelles le théorème est déjà démontré : il suffit alors d'appliquer la propriété II. Passons au cas général. Soient f_n et φ_n les fractions de dénominateur n approchées de f et de φ par défaut à moins de $1 : n$ près. Ces fonctions ne sont susceptibles que d'un nombre limité de valeurs, donc l'intégrale de $(f_n + \varphi_n)$ est la somme de celles de f_n et de φ_n ; mais, quand n tend vers l'infini, ces trois intégrales tendent respectivement vers celles de $(f + \varphi)$, de f et de φ, en vertu du lemme précédent, ce qui démontre la proposition.

247. Comparaison avec l'intégrale de Riemann. — Pour que l'intégrale de Lebesgue soit une généralisation utile, il faut qu'elle renferme celle de Riemann comme cas particulier. Nous allons montrer qu'il en est ainsi, à l'aide des propositions suivantes :

1° *Si f est intégrable* (R) *dans* (a, b), *l'ensemble* E *de ses points de discontinuité est de mesure nulle.*

En effet, soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ une suite positive décroissante tendant vers 0. Désignons par E_1 l'ensemble des points où l'oscillation de f est $> \varepsilon_1$ et, en général, par E_n celui où cette oscillation est $> \varepsilon_n$ mais $\leqslant \varepsilon_{n-1}$. Chacun de ces ensembles est de longueur nulle (n° 244), donc aussi de mesure nulle, et l'ensemble E qui est leur somme est de mesure nulle (n° 78).

2° *Une fonction f est mesurable dans tout intervalle* (a, b) *où l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle.*

En effet, les seuls points-limites qui manquent à l'ensemble $E(f \geqslant A)$ sont des points de discontinuté de f, dont l'ensemble est de mesure nulle. Donc l'ensemble $E(f \geqslant A)$, différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble de mesure nulle, est mesurable (n° 78) et f est mesurable (n° 82).

3° *Toute fonction f intégrable* (R) *dans* (a, b) *est donc aussi intégrable* (L) *et, de plus, ses intégrales* (R) *et* (L) *sont égales.*

Décomposons (a, b) en intervalles élémentaires δ_i par des points intermédiaires x_i. Soient M_i et m_i les bornes de f dans $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. On a, par le théorème de la moyenne pour l'intégrale de Lebesgue,

$$m_i\delta_i \leqslant (L)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,dx \leqslant M_i\delta_i$$

et, en sommant par rapport à i,

$$\Sigma m_i \delta_i \leqslant (\mathrm{L}) \int_a^b f\,dx \leqslant \mathrm{M}_i \delta_i.$$

Donc l'intégrale de Lebesgue, comprise entre les deux sommes qui ont pour limite commune celle de Riemann, est égale à cette dernière.

248. Intégrales de fonctions non bornées. Fonctions sommables. — 1° Soit d'abord $f(x)$ une fonction NON NÉGATIVE. Supposons-la mesurable, mais non bornée, dans l'ensemble mesurable et borné E. Définissons la fonction f_n comme égale à f si $f \leqslant n$, et à n si $f \geqslant n$. L'intégrale de f dans E est, par définition, la limite (finie ou infinie) de celle de f_n quand n tend vers l'infini.

Si cette intégrale est finie, la fonction f est *sommable dans l'ensemble* E (*).

Si la fonction f n'est pas sommable, son intégrale dans E est infinie positive.

Si une fonction est sommable dans un ensemble E, elle n'y devient infinie que dans un ensemble de mesure nulle. En effet, dans le cas contraire, f_n serait $\geqslant n$ dans l'ensemble, de mesure α, où f est infinie, son intégrale serait donc $> n\alpha$ et croîtrait à l'infini avec n.

Ces définitions s'étendent aux fonctions non négatives par un simple changement de signe.

2° Considérons maintenant une fonction f DE SIGNE QUELCONQUE. C'est la différence $f_1 - f_2$ de deux fonctions non négatives, f_1 étant égal à f ou à 0 selon que f est $\geqslant 0$ ou < 0 et f_2 égal à f ou à 0 selon que $f \leqslant$ ou > 0. La fonction f sera dite *sommable dans l'ensemble* E (borné), si f_1 et f_2 sont tous deux sommables dans E et alors l'intégrale dans f est, par définition, la différence de celles de f_1 et de f_2. Nous ne nous occuperons pas, dans ce chapitre, du cas où l'ensemble E ne serait pas borné.

Si les fonctions f_1 ou f_2 n'étaient pas sommables, nous n'attribuerions à f aucune intégrale.

Il suit évidemment des définitions que nous venons de donner que, *si une fonction est sommable, sa valeur absolue l'est aussi, et réciproquement.*

249. Propriétés des intégrales de fonctions sommables. — I. *Si f est sommable dans un ensemble* E, *à tout nombre positif* 2ε *eorrespond un nombre* δ. *tel que l'intégrale de f soit de valenr absolue* $< 2\varepsilon$ *dans toute portion de* E *de mesure* $< \delta$.

Il suffit de faire la preuve pour une fonction f non négative. Défi-

---

(*) M. Lebesgue n'appelle *sommables* que les fonctions *partout finies*. Nous ne faisons pas cette restriction,

nissons f_n comme dans le n° précédent et prenons n assez grand pour que l'on ait, ce qui est possible par hypothèse,

$$\int_E f\,dx - \int_E f_n\,dx < \varepsilon.$$

Cette relation subsiste *a fortiori* si l'on y remplace E par l'une de ses parties E_1. Il s'ensuit que le nombre δ du théorème peut-être fait égal à $\varepsilon : n$, car on aura, dans toute portion E_1 de mesure $< \delta = \varepsilon : n$,

$$\int_{E_1} f_n\,dx < n\delta < \varepsilon, \quad \text{d'où} \quad \int_{E_1} f\,dx < 2\varepsilon,$$

II. *Soit* E *l'ensemble-somme d'un nombre fini d'ensembles* $E_1, E_2, \ldots$ *sans points communs et dans lesquels* f *est sommable,* f *sera encore sommable dans* E, *et l'on aura*

$$(1) \qquad \int_E f\,dx = \int_{E_1} + \int_{E_2} f\,dx + \cdots$$

Il suffit encore de faire la preuve pour f non négatif. Dans ce cas, on a, quelque grand que soit n (n° 246, II),

$$(2) \qquad \int_E f_n\,dx = \int_{E_1} + \int_{E_2} f_n\,dx + \cdots$$

Quand n tend vers l'infini, le second membre de (2) a pour limite le second membre de (1) donc le premier membre de (2) a une limite finie, et celle-ci est par définition le premier membre de (1), ce qui prouve les deux parties du théorème.

III. *Si* E *(borné) est la somme d'une infinité d'ensembles sans points communs* $E_1, E_2, \ldots$, *la formule* (1) *subsiste encore pourvu que* f *soit sommable dans* E.

Posons, en effet,

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n + R_n.$$

Quand n tend vers l'infini, la mesure de R_n tend vers 0. Donc, par la propriété I,

$$\lim \int_{R_n} f\,dx = 0.$$

Ceci entendu, on a, par la propriété II,

$$\int_E f\,dx = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \cdots + \int_{E_n} + \int_{R_n} f\,dx.$$

Faisons tendre n vers l'infini, le dernier terme tend vers 0 et la somme embrasse tous les ensembles E_n, ce qui prouve le théorème.

IV. *La somme* f *d'un nombre limité de fonctions* $f_1, f_2, \ldots$, *sommables dans un ensemble* E, *est sommable aussi et l'on a*

$$(3) \qquad \int_E f\,dx = \int_E f_1\,dx + \int_E f_2\,dx + \ldots.$$

Soit $(f)_N$ une fonction égale à f ou à N selon que f est $\leqslant$ ou $>$ N. Définissons $(f_k)_N$ de la même façon par rapport à f_k ; nous avons

$$(f)_N \leqslant (f_1)_N + (f_2)_N + \cdots \leqslant f,$$

d'où, en intégrant (n° 246, IV),

$$\int_E (f)_N\, dx \leqslant \int_E (f_1)_N\, dx + \int_E (f_2)_N\, dx + \cdots \leqslant \int_E f\, dx.$$

Faisons tendre N vers l'infini. Par définition (n° 248), la somme du milieu dans ces dernières inégalités a pour limite le second membre de l'équation (**3**), tandis que les deux membres extrêmes (qui comprennent cette somme) deviennent tous deux égaux (à la limite) au premier membre de la même équation (**3**). Celle-ci est donc démontrée.

V. *Si f est sommable dans* E, *on peut encore, comme on l'a fait* (n° 245) *pour définir l'intégrale d'une fonction bornée, construire, au moyen d'une échelle de nombres l_i, deux sommes :*

$$s = \Sigma l_{i-1}\, e_i, \qquad S = \Sigma l_i e_i,$$

l'une inférieure, l'autre supérieure à l'intégrale de f dans E, *et aussi voisines que l'on veut l'une de l'autre.*

Pour simplifier, considérons seulement une fonction f non négative. Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on voudra. Formons une échelle croissant de 0 à ∞ par degrés $< \varepsilon$:

$$l_0 = 0,\ l_1,\ l_2, \ldots\ l_i, \ldots$$

Soit e_i l'ensemble (ou la mesure de l'ensemble) des points où l'on a $l_{i-1} \leqslant f < l_i$. Abstraction faite d'un ensemble éventuel de mesure nulle où f serait infini et que nous pouvons négliger pour l'intégration, nous avons $E = e_1 + e_2 + \ldots$; par conséquent (par la propriété III),

$$\int_E f\, dx = \sum_i \int_{e_i} f\, dx ;$$

puis, en appliquant dans chaque e_i le théorème de la moyenne,

$$s = \sum_i l_{i-1}\, e_i \leqslant \int_E f\, dx \leqslant \Sigma l_i e_i = S.$$

Enfin $S - s$ est aussi petit qu'on veut avec ε, puisque, les degrés étant $< \varepsilon$, nous avons

$$S - s = \sum_i (l_i - l_{i-1})\, e_i < \varepsilon \Sigma e_i = \varepsilon (mE).$$

VI. Inégalité de Schwarz. — *Si f^2 et φ^2 sont sommables dans* E, *$f\varphi$ l'est aussi, car il est de valeur absolue moindre que $f^2 + \varphi^2$, et l'on a*

$$\left(\int_E f\varphi\, dx\right)^2 \leqslant \left(\int_E f^2\, dx\right)\left(\int_E \varphi^2\, dx\right).$$

Si f et φ sont constants dans E, les deux membres sont identiques. Si f et φ ne sont susceptibles que d'un nombre limité de valeurs finies, l'ensemble E se partage en un nombre limité d'ensembles de mesures $e_1, e_2, \ldots$ où f et φ prennent les valeurs constantes a_1, b_1 ; a_2, b_2 ; ... et l'inégalité précédente revient à

$$(a_1 b_1 e_1 + a_2 b_2 e_2 + \cdots)^2 \leqslant (a_1^2 e_1 + a_2^2 e_2 + \cdots)(b_1^2 e_1 + b_2^2 e_2 + \cdots)$$

ou, en posant $a_1 = A_1 : \sqrt{e_1}$, $b_1 = B_1 : \sqrt{e_1}$, etc.

$$(A_1^2 + A_2^2 + \cdots)(B_1^2 + B_2^2 + \cdots) - (A_1 B_1 + A_2 B_2 + \cdots)^2 \geqslant 0,$$

ce qui est exact, car le premier membre est une somme de carrés :

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 + \cdots$$

On passe ensuite au cas où f et φ sont bornés quelconques, puis sommables, par de simples passages à la limite comme précédemment (nos 246, IV et 249, I).

250. Passage à la limite sous le signe $\int$. — Considérons une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ sommables dans un ensemble E et tendant vers une limite (finie ou infinie) f. Cherchons sous quelles conditions nous aurons

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx. \tag{1}$$

Voici le théorème fondamental :

THÉORÈME I. — *L'équation* (1) *est légitime si les fonctions f_n sont bornées dans leur ensemble, c'est-à-dire quels que soient n et x* (LEBESGUE).

En effet, dans ce cas, la fonction-limite f, étant bornée aussi, a une intégrale finie et déterminée. Il suffit donc de montrer que l'intégrale

$$\int_E (f - f_n) dx$$

a pour limite 0 avec $1 : n$, c'est-à-dire qu'elle peut être rendue aussi petite que l'on veut à condition de prendre n assez grand.

Soit ε un nombre positif, ensuite E_n l'ensemble des points où $|f - f_n| \geqslant \varepsilon$. Faisons la décomposition en deux intégrales :

$$\int_E (f - f_n) \, dx = \int_{E - E_n} (f - f_n) \, dx + \int_{E_n} (f - f_n) \, dx.$$

La première est aussi petite qu'on veut avec ε, en vertu du théorème de la moyenne ($f - f_n$ étant de valeur absolue $< \varepsilon$), il suffit donc maintenant de démontrer que l'intégrale

$$\int_{E_n} (f - f_n) \, dx \tag{2}$$

tend vers 0 avec $1 : n$.

C'est ce qui résulte, dans ce cas-ci, du théorème connu (nº 85) sur la convergence, en vertu duquel mE_n tend vers 0 avec $1 : n$. La fonction sous le signe étant bornée, l'intégrale tend vers 0.

THÉORÈME. II. — *Plus généralement, l'équation* (1) *est légitime si les fonctions f_n sont toutes de module inférieur à une fonction positive sommable* φ.

En effet, la valeur absolue de la fonction-limite f ne surpasse pas φ, donc f est sommable. Comme on peut négliger l'ensemble de mesure nulle des points où l'une des fonctions serait infinie, tout revient, comme dans la démonstration précédente, à prouver que l'intégrale (2) tend vers 0 avec mE Ceci résulte immédiatement de ce qu'elle est inférieure en valeur absolue à l'intégrale

$$\int_{E_n} 2\varphi \, dx,$$

laquelle tend vers 0 avec mE_n (nº 249, I).

THÉORÈME III. — *Lorsque la suite $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ est positive et non décroissante, on a toujours*

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx,$$

mais les deux membres peuvent être infinis en même temps.

Ce théorème est un cas particulier du précédent si f est sommable, puisque f_n ne surpasse pas la fonction positive sommable $\varphi = f$. Il reste seulement à montrer que, si f n'est pas sommable, le premier membre de l'équation est infini.

Soit $(f)_N$ une fonction égale à f ou à N selon que f est $\leqslant$ ou $>$ N ; définissons $(f_n)_N$ de la même manière relativement à f_n. Ainsi la suite bornée $(f_1)_N, (f_2)_N, \ldots$ tend vers la fonction bornée $(f)_N$ et il vient, par le théorème I,

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n \, dx \geqslant \lim_{n=\infty} \int_E (f_n)_N \, dx = \int_E (f)_N dx.$$

La dernière intégrale est infinie avec N, donc la première (qui est indépendante de N) est infinie.

THÉORÈME IV. *L'équation* (1) *est légitime, si à tout* ω *positif correspond un* δ *positif tel qu'on ait, quel que soit* n,

$$\left| \int_F f_n \, dx \right| < \omega, \tag{3}$$

sous la condition que F *soit une portion de* E *de mesure* $< \delta$. *Cela étant, f est sommable dans* E.

Montrons d'abord que f sera sommable dans E. La condition (3) est de telle nature que si elle a lieu pour f_n elle a aussi lieu pour

$|f_n|$ (car on peut prendre pour F les ensembles où f_n ne change pas de signe). D'ailleurs $|f_n|$ a pour limite $|f|$. Il suffit donc de raisonner sur les modules. Autant admettre que les fonctions sont positives. Dans ce cas, on a, avec les notations de la démonstration précédente,

$$\int_E (f)_N dx = \lim_{n=\infty} \int_E (f_n)_N dx \leqslant \lim_{n=\infty} \int_E f_n dx.$$

Mais la mesure de E ne surpasse pas $k\delta$ où k est un entier suffisamment grand ; donc E peut se partager en k ensembles de mesure $\leqslant \delta$ et la dernière intégrale ne supasse pas $k\omega$. Ainsi l'intégrale de f_N est bornée quel que soit N, c'est-à-dire que f est sommable dans E.

Tout revient alors à montrer, comme dans la démonstration du théorème I, que l'intégrale (2), qui se décompose en deux autres :

$$\int_{E_n} f\,dx - \int_{E_n} f_n\,dx,$$

tend vers 0 avec $1:n$, ce qui est vrai pour la première parce que f est sommable, et pour la seconde par hypothèse (mE_n tendant vers 0 avec $1:n$).

THÉORÈME V. — *Soit $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$ une suite positive non décroissante de fonctions sommables dans* E, *ayant pour limite f ; soit ensuite φ une fonction de signe quelconque, telle seulement que $f\varphi$ soit sommable dans* E ; *on aura*

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n \varphi dx = \int_E f\varphi\,dx.$$

On partage l'ensemble E en deux autres où φ ne change pas de signe. En raisonnant sur ceux-ci séparément, on est ramené au théorème III.

THÉORÈME VI. — *Si la suite des fonctions $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$ sommables dans* E, *tend vers une limite f, sommable aussi, de telle façon que les fonctions $(f-f_n)^2$ soient encore sommables et leurs intégrales dans* E *bornées dans leur ensemble, c'est-à-dire inférieures à une constante h indépendante de n, l'équation* (1) *subsiste encore* (RIESZ).

En effet, tout revient, comme dans la démonstration du théorème I, à montrer que l'intégrale (2),

$$\int_{E_n} (f - f_n)\,dx,$$

tend vers 0 avec mE_n. Ceci résulte de l'inégalité de Schwarz (n° 249), qui montre que le carré de cette intégrale est inférieure à

$$\left(\int_{E_n} (f-f_n)^2\,dx\right)\left(\int_{E_n} dx\right) < h(mE_n).$$

251. Intégrale indéfinie. — Avec M. Lebesgue, nous appelerons *intégrale indéfinie* l'expression

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + C.$$

On suppose que x varie dans un intervalle où $f(x)$ est sommable et que C est une constante. D'après cette définition, si l'on désigne par $\Delta_\alpha F$ la différence de $F(x)$ dans un intervalle α, c'est-à-dire la différence $F(x'') - F(x')$ relative aux extrémités de l'intervalle α ou (x', x''), on a

$$\int_\alpha f(x)\,dx = \Delta_\alpha F.$$

Ainsi *l'intégrale de f dans un intervalle* α *est égale à la différence de* F *dans cet intervalle.*

THÉORÈME. — *L'intégrale indéfinie,* $F(x)$, *est une fonction à variation bornée, absolument continue, et sa variation totale dans* (a, b) *a pour valeur*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Nous allons prouver ces diverses propositions. Rappelons d'abord que toute fonction sommable, f, est la différence $f_1 - f_2$ de deux fonctions analogues mais non négatives (nº 248). D'après cela, nous avons

$$F(x) = \int_a^x f\,dx = \int_a^x f_1\,dx - \int_a^x f_2\,dx,$$

en sorte que la fonction $F(x)$ est la différence de deux fonctions continues non décroissantes : elle est donc à variation bornée (nº 88).

Ensuite $F(x)$ est absolument continue. En effet, soit E l'ensemble d'une infinité dénombrable d'intervalles α, on a

$$\Sigma \mid \Delta_\alpha F \mid = \Sigma \left| \int_\alpha f\,dx \right| \leqslant \int_E |f|\,dx$$

Cette dernière intégrale est aussi petite qu'on veut avec mE, par la propriété I du nº 249 ; donc la somme des différences absolues de F dans un ensemble d'intervalles tend vers 0 avec la somme de ces intervalles, autrement dit, F est absolument continue (nº 89).

Cherchons maintenant la variation totale de F dans l'intervalle (a, b). A cet effet, partageons (a, b) d'une manière quelconque en intervalles consécutifs. Désignons, en général, par α ceux où la différence $\Delta_\alpha F$ est positive, par β ceux où $\Delta_\beta F$ est négative. Les sommes p et $-n$ des différences positives et des différences négatives (nº 86) ont pour expressions :

$$p = \sum_\alpha \int_\alpha f\,dx, \qquad -n = \sum_\beta \int_\beta f\,dx.$$

Donc, si E_p désigne l'ensemble des points de (a, b) où $f > 0$, E_n celui où $f < 0$, les bornes supérieures P de p et N de n sont assujetties aux inégalités :

$$P \leqslant \int_{E_p} f\,dx, \qquad N \leqslant -\int_{E_n} f\,dx.$$

Mais je dis que l'égalité seule est possible et je vais le prouver pour P (ce qui suffit) en montrant que P ne peut être moindre que cette limite.

L'ensemble E_p est constitué, comme il suit :

$$E_p = \mathcal{E} + e' - e'',$$

d'un ensemble $\mathcal{E}$ formé d'intervalles en nombre fini et de deux ensembles e' et e'' de mesures infiniment petites (nº 77). Par suite, on a

$$\int_{\mathcal{E}} f\,dx = \int_{E_p} f\,dx + \int_{e''} f\,dx - \int_{e'} f\,dx.$$

Le premier membre est une somme de différences de $F(x)$. Dans le second, les intégrales sur e'' et e' sont infiniment petites ; donc celle sur E_p, différant aussi peu qu'on veut d'une somme de différences de $F(x)$, ne peut être supérieure à la borne supérieure P de cette somme.

En définitive, la variation totale P + N (nº 74) aura bien la valeur que nous lui avons assignée :

$$\int_{E_p} - \int_{E_n} f\,dx = \int_a^b |f|\,dx.$$

252. Variation d'une fonction dans un ensemble mesurable. Relation entre les intégrales définies et indéfinies. — Soient E un ensemble mesurable contenu dans un intervalle (a, b) et $F(x)$ une fonction continue dans cet intervalle. Enfermons E (au sens étroit) dans une infinité dénombrable d'intervalles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ n'empiétant pas (nº 74) et désignons, en général, par $\Delta_\alpha F$ la différence de $F(x)$ dans un intervalle α. Si la somme étendue à toutes ces différences,

$$\sum_n \Delta\alpha_n F,$$

est absolument convergente, sa valeur est la *variation* (algébrique) *de* $F(x)$ *dans l'ensemble des* α.

Si cette variation tend vers une limite, toujours la même, quand on fait tendre la somme $\Sigma\alpha$ des longueurs des intervalles vers la mesure de E, cette limite est la *variation* (algébrique) *de* $F(x)$ *dans l'ensemble* E.

Théorème. — *Soient* $f(x)$ *une fonction sommable dans* (a, b) *et* $F(x)$ *son intégrale indéfinie. Soit* E *un ensemble mesurable compris dans* (a, b), *l'intégrale de* $f(x)$ *dans* E *est égale à la variation de* $F(x)$ *dans* E.

Enfermons E dans un ensemble d'intervalles α non empiétants, et soit CE l'ensemble complémentaire de E par rapport aux α. On a, la somme s'étendant aux α,

$$\Sigma\,\Delta_\alpha F = \Sigma \int_\alpha f\,dx = \int_E f\,dx + \int_{CE} f\,dx.$$

Faisons tendre $\Sigma\alpha$ vers mE, alors mCE tend vers 0 et la dernière intégrale disparaît. Il vient ainsi

$$\int_E f\,dx = \lim \sum_\alpha \Delta_\alpha F = \text{var. de } F(x) \text{ dans } E.$$

§ 2. Recherche des fonctions primitives.

253. Fonctions primitives. — Les fonctions qui ont pour dérivée ou pour nombre dérivé une fonction donnée, sont ses *fonctions primitives.* La recherche des fonctions primitives se résout d'une manière élémentaire pour une fonction continue $f(x)$. Toutes les fonctions primitives de $f(x)$ sont, en effet, comprises dans l'intégrale indéfinie

$$\int_a^x f(x) + C,$$

qui est élémentaire. Mais, si on laisse de côté la condition de continuité, le problème de trouver une fonction dont la dérivée soit une fonction donnée, $f(x)$, n'admet pas en général de solution, car toute fonction n'est pas une dérivée. Il faut donc remplacer ce problème par l'un des suivants :

1° *Reconnaître si une fonction donnée est une fonction dérivée et trouver, dans ce cas, la fonction primitive.*

2° *Reconnaître si une fonction donnée est un nombre dérivé supérieur à droite* (ou un autre nombre dérivé) *et trouver, dans ce cas, la fonction primitive.*

L'intégrale de Lebesgue permet de remonter, dans des cas très généraux, de la fonction dérivée à la fonction primitive et de donner, en même temps, la solution des problèmes précédents. Cependant la réponse complète ne peut s'obtenir que par une nouvelle extension de la notation d'intégrale qui est due à M. Denjoy (*). Mais celle-ci repose sur un ordre de considérations qui est étranger au cadre de cet ouvrage et nous nous bornerons à l'intégrale de Lebesgue.

Nous avons d'abord une remarque préliminaire à faire :

La dérivée ou les nombres dérivés d'une fonction continue $F(x)$ *sont des fonctions mesurables.*

En effet, la dérivée si elle existe, est la limite de la fonction continue

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

tandis que les nombres dérivés sont les limites d'indétermination de ce rapport et nous savons (n° 84) que ces fonctions sont mesurables.

(*) Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale. C. R. de Paris, 22 avril, 1912.

La fonction primitive d'une dérivée bornée s'obtient simplement par le théorème de M. Lebesgue relatif au passage à la limite sous le signe $\int$, et, quoique ce résultat rentre comme cas particulier dans les suivants, il est cependant intéressant de l'établir pour commencer.

254. Fonction primitive d'une dérivée bornée. — *Soit* $F(x)$ *une fonction ayant une dérivée bornée* $f(x)$, *on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

En effet, on a, par le théorème de M. Lebesgue (nº 250),

$$\lim_{h=0} \int_a^b \frac{F(x+h) - F(x)}{h}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

parce que le rapport sous le signe $\int$ reste borné quand h tend vers 0. Mais on peut faire la transformation

$$\int_a^b [F(x+h) - F(x)]\,dx = \int_{a+h}^{b+h} - \int_a^b F(x)\,dx = \int_b^{b+h} - \int_a^{a+h} F(x)\,dx$$

et appliquer le théorème de la moyenne à ces deux dernières intégrales. En divisant par h, passant à la limite et observant que F est continue, on trouve la formule de l'énoncé.

Ce théorème s'applique en remplaçant b par toute valeur x de l'intervalle (a, b) ; on a donc

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(x)\,dx.$$

Donc *une fonction dérivée bornée a ses intégrales indéfinies pour fonctions primitives.*

Le théorème précédent permet de reconnaître si une fonction mesurable et bornée $f(x)$ est une dérivée. On calcule $F(x)$ par la formule précédente et l'on vérifie directement si F a pour dérivée f.

Si la fonction dérivée $f(x)$ n'est pas bornée, le passage à la fonction primitive exige des raisonnements plus délicats. Les théorèmes fondamentaux ont été obtenus par M. Lebesgue, mais nous adopterons pour y arriver un procédé différent du sien, que nous avons fait connaître dans l'édition précédente de ce cours et que nous allons préciser un peu davantage dans celle-ci. Ce procédé consiste à construire, comme nous allons le faire, des fonctions auxiliaires dont les dérivées satisfont partout à certaines conditions d'inégalité.

255. Fonctions majorante et minorante. — Nous donnerons ce nom à deux fonctions qui sont respectivement approchées par excès et par défaut de l'intégrale

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

et qui seront construites de manière à réaliser certaines conditions que nous allons indiquer.

Soit $f(x)$ une fonction sommable dans l'intervalle (a, b), finie sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle. Nous allons construire, dans cet intervalle, une fonction continue, $\varphi_1(x)$, infiniment voisine par excès de l'intégrale ci-dessus et dont les quatre nombres dérivés surpassent $f(x)$ en tous les points où $f(x)$ est finie. Nous l'appellerons la fonction MAJORANTE *relative à $f(x)$.*

Nous construirons, en même temps, une fonction MINORANTE, *$\varphi_2(x)$, infiniment voisine par défaut de la même intégrale et dont les nombres dérivés seront tous $< f(x)$ en tout point où $f(x)$ est finie.*

La construction de la fonction minorante se ramène à celle de la fonction majorante, car, si $-\psi$ est la majorante relative à $-f$, alors ψ est la minorante relative à f. Il suffit donc de construire la majorante.

D'autre part, il suffit de savoir construire la majorante pour f non négatif. En effet, définissons $f_N(x)$ comme égale à $f(x)$ ou à $-N$ selon que f est $\geqslant$ ou $< -N$. Pour N positif infiniment grand, l'intégrale de f_N surpasse infiniment peu celle de f. Il suffit donc de savoir construire la majorante relative à f_N. Pour cela, il suffit de construire la majorante relative à $f_N + N$ qui n'est pas négatif. Soit, en effet, ψ_1 cette majorante, celle φ_1 relative à f_N sera $\psi_1 - Nx$.

Proposons-nous donc de construire la majorante relative à une fonction $f(x)$ non négative. Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on voudra. Donnons-nous une échelle de nombres positifs :

$$0,\ l_1,\ l_2, \dots\ l_n, \dots$$

croissant jusqu'à l'infini par degrés $< \varepsilon$.

Désignons par e_n l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) où l'on a

$$l_n \leqslant f(x) < l_{n+1}.$$

Désignant aussi par e_n la mesure de l'ensemble de même nom, nous aurons, par définition de l'intégrale (n° 249, V),

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n e_n < \int_a^b f\,dx < \sum_{n=0}^{\infty} l_{n+1} e_n .$$

Par conséquent, puisque $l_{n+1} - l_n$ est $< \varepsilon$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_{n+1} e_n < \int_a^b f\,dx + \varepsilon(b-a).$$

Désignons encore par $e_n(x)$ la mesure de la portion de l'ensemble e_n comprise entre a et x. On aura, de la même manière,

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n e_n(x) < \int_a^x f\,dx < \sum_{n=0}^{\infty} l_{n+1} e_n(x)$$

et *a fortiori*, pour x compris dans (a, b),

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_{n+1}\, e_n(x) < \int_a^x f\,dx + \varepsilon\,(b-a).$$

Donnons-nous maintenant une suite positive $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots\ \varepsilon_n, \ldots$ assez rapidement décroissante pour que l'on ait

$$\Sigma\, l_{n+1}\, \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Ceci fait, enfermons e_n (au sens étroit) dans une infinité d'intervalles non empiétants (n° 74) d'amplitudes $\delta_1^n, \delta_2^n, \ldots$ de manière qu'on ait

$$e_n < \sum_k \delta_k^n < e_n + \varepsilon_u\,.$$

Appelons $S^n(x)$ la somme de tous les intervalles δ^n et portions d'intervalles δ^n compris entre a et x. On aura *a fortiori*

$$e_n(x) < S^n(x) < e_n(x) + \varepsilon_n\,.$$

Je dis maintenant que la fonction

$$\varphi_1(x) = \sum_n l_{n+1}\, S^n(x)$$

satisfait aux conditions du théorème.

On a d'abord, par les dernières inégalités,

$$\sum_n l_{n+1}\, e_n(x) < \varphi_1(x) < \sum_n l_{n+1}\, e_n(x) + \sum_n l_{n+1}\, \varepsilon_n$$

et, *a fortiori*, par les précédentes

$$\int_a^x f\,dx < \varphi_1(x) < \int_a^x f\,dx + \varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

Donc $\varphi_1(x)$ est aussi voisin qu'on veut par excès de l'intégrale. Montrons que les nombres dérivés de $\varphi_1(x)$ surpassent $f(x)$ en tout point où $f(x)$ est finie.

Supposons donc que $f(x)$ tombe entre l_n et l_{n+1} (exclu) ; le point x fait alors partie de l'ensemble e_n et est intérieur au sens étroit à un intervalle δ^n ou est la limite commune de deux d'entre eux (n° 74). Or on a

$$\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x) = \Sigma\, l_{n+1}\, [S^n(x+h) - S^n(x)]$$

Tous les termes de la somme sont positifs avec h (ou nuls) et non décroissants si h augmente. Donc, si h est positif et assez petit pour que $x+h$ soit encore dans le même δ^n que x, on aura (en ne gardant qu'un terme)

$$\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x) \geqslant l_{n+1}\, [S^n(x+h) - S^n(x)] \geqslant h l_{n+1}.$$

Le sens de l'inégalité changerait pour h négatif, de sorte que l'on a toujours, pour $|\,h\,|$ assez petit,

$$\frac{\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)}{h} \geqslant l_{n+1}.$$

Donc les quatre nombres dérivés, étant au moins égaux à l_{n+1}, sont tous $> f(x)$.

256. Remarques sur les fonctions précédentes. — 1° *Les fonctions majorante et minorante sont telles que les différences :*

$$\varphi_1(x) - \int_a^x f\,dx, \qquad \int_a^x f\,dx - \varphi_2(x),$$

sont non décroissantes.

Il suffit évidemment de faire la preuve pour la première différence et cela dans le cas fondamental où f est non négatif. Conservons donc les notations de la démonstration précédente.

Soit (x', x'') un intervalle $(x'' > x')$. La portion de l'ensemble e_n contenue dans cet intervalle a pour mesure $e_n(x'') - e_n(x')$, de sorte que l'on a

$$\int_{x'}^{x''} f\,dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} l_{n+1}\,[e_n(x'') - e_n(x')].$$

Mais, comme on a, par définition de $S^n(x)$,

$$S^n(x'') - S^n(x') \geqslant e_n(x'') - e_n(x'),$$

il vient *a fortiori*

$$\int_{x'}^{x''} f\,dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} l_{n+1}\,[S^n(x'') - S^n(x')] \leqslant \varphi_1(x'') - \varphi_1(x')$$

et c'est ce qu'il fallait démontrer (l'intégrale étant positive).

2° *Si $f(x)$ est bornée dans l'intervalle (a, b), $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont à nombres dérivés bornés.*

Bornons-nous encore à la construction de φ_1 dans le cas où f est positif, ce qui est permis. Si f est borné, l'échelle $l_1, l_2,\ldots$ peut être bornée à un nombre limité de termes. D'autre part, l'ensemble e_n est enfermé dans des intervalles δ^n n'empiétant pas. Alors, le point x ne pouvant tomber dans l'intérieur de deux intervalles δ^n_k de même indice n, la dérivée de $S^n(x)$ ne peut surpasser l'unité et celle de $\varphi_1(x)$ ne peut surpasser la somme finie Σl_n.

257. Théorème I. — *S'il existe une fonction $f(x)$ intermédiaire (au sens large) entre les deux dérivées à droite d'une fonction continue $F(x)$, et si $f(x)$ est finie et sommable dans l'intervalle (a, b), on a, dans cet intervalle,*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

En particulier, par conséquent, si $F(x)$ a un nombre dérivé fini et sommable Λ, on a (Lebesgue)

$$F(x) - F(a) = \int_a^x \Lambda\,dx.$$

Construisons, pour la fonction $f(x)$, les deux fonctions majorante et minorante φ_1 et φ_2, infiniment voisines et telles que l'on ait

$$\varphi_1(x) > \int_a^x f(x)\,dx > \varphi_2(x).$$

Les nombres dérivés de φ_1 sont tous $> f$, ceux de φ_2 sont tous $< f$ (supposée finie) ; par conséquent, les deux fonctions

$$\varphi_1(x) - F(x), \qquad F(x) - \varphi_2(x),$$

sont à nombre dérivés partout positifs et sont, conséquemment, croissantes dans (a, b). Donc, φ_1 et φ_2 s'annulant par construction au point a, il vient

$$\varphi_1(x) > F(x) - F(a) > \varphi_2(x) ;$$

enfin, par comparaison avec les inégalités précédentes et en rappelant que les fonctions φ_1 et φ_2 sont infiniment voisines,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

258. Théorème II. — *L'intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$ mesurable et* BORNÉE (*) *dans un intervalle (a, b), a $f(x)$ pour dérivée presque partout.*

Nous convenons de dire, avec M. Lebesgue, qu'une propriété a lieu PRESQUE PARTOUT *si elle a lieu sauf dans un ensemble de mesure nulle.*

Reprenons les fonctions, majorante φ_1, et minorante φ_2, de la démonstration précédente. Elles sont à nombres dérivés bornés puisque $f(x)$ est bornée (nº 256).

Soient Λ_1 et Λ_2 les nombres dérivés supérieurs à droite de φ_1 et de φ_2 ; on a (nº 255)

$$\Lambda_1 > f > \Lambda_2.$$

Soit Λ le nombre dérivé supérieur à droite de l'intégrale indéfinie $\int_a^x f\,dx$. Celle-ci ne peut croître ni plus vite que φ_1 ni moins vite que φ_2 (nº 256). On a donc aussi

$$\Lambda_1 \geqslant \Lambda \geqslant \Lambda_2.$$

Si l'on compare ces inégalités aux précédentes, il vient

$$| \Lambda - f | < \Lambda_1 - \Lambda_2 ;$$

d'où, en intégrant puis appliquant le théorème précédent, ce qui est permis (puisque Λ_1 et Λ_2 sont bornés),

$$\int_a^b | \Lambda - f | \,ax < \int_a^b \Lambda_1\,dx - \int_a^b \Lambda_2\,dx = \varphi_1(b) - \varphi_2(b).$$

Cette dernière différence peut être supposée aussi petite qu'on veut ; par conséquent,

$$\int_a^b | \Lambda - f | \,dx = 0$$

(*) Cette restriction disparaîtra au théorème IV (nº 260).

et $\Lambda = f$ *presque partout*. Donc chacun des quatre nombres dérivés de l'intégrale de f est égale à f presque partout. Ils le sont donc aussi simultanément presque partout, ce qui prouve la proposition.

259. Théorème III. — *Si la fonction continue* $F(x)$ *est non décroissante dans un intervalle* (a, b), *l'un quelconque* Λ *de ses nombres dérivés est sommable dans cet intervalle et l'on a*

$$\int_a^b \Lambda\, dx \leqslant F(b) - F(a).$$

Définissons Λ_n comme égal à Λ ou à n selon que Λ (qui est nécessairement $\geqslant 0$) ne surpasse pas le nombre positif n ou le surpasse. Formons l'intégrale indéfinie

$$\Phi_n(x) = \int_a^x \Lambda_n\, dx$$

et construisons la fonction minorante $\varphi_2(x)$ relative à cette intégrale et dont tous les nombres dérivés sont, par conséquent, $< \Lambda_n$ et *a fortiori* $< \Lambda$. Cette dernière conséquence entraîne, puisque $\varphi_2(a)$ est nul,

$$F(b) - F(a) > \varphi_2(b)$$

et, en faisant tendre φ_2 vers sa limite Φ_n,

$$F(b) - F(a) \geqslant \Phi_n(b) = \int_a^b \Lambda_n\, dx.$$

Faisons main enant tendre n vers l'infini ; cette dernière intégrale, étant bornée par le premier membre, tend vers une limite finie. Celle-ci est, par définition, l'intégrale de Λ, donc Λ est sommable. De plus, on obtient à la limite l'inégalité qu'il fallait démontrer.

260. Théorème IV. — *L'intégrale indéfinie d'une fonction sommable, bornée ou non, admet cette fonction pour dérivée presque partout* (LEBESGUE).

Une fonction sommable est la différence de deux fonctions sommables non négatives (n° 248). Il suffit donc de prouver le théorème pour une fonction non négative.

Soit Λ le nombre dérivé supérieur à droite de

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx.$$

Définissons une fonction f_n égale à f ou à n selon que f est $\leqslant n$ ou $> n$. Le nombre dérivé supérieur à droite de l'intégrale (moins rapidement croissante que F)

$$\int_a^x f_n\, dx,$$

sera $\leqslant \Lambda$, mais il est égal à f_n presque partout (nº 258). Par suite, on a presque partout $\Lambda \geqslant f_n$, donc $\geqslant f$, puisque n est quelconque ; c'est-à-dire que l'on a presque partout

$$\Lambda - f = |\Lambda - f|.$$

Ceci posé, on a, par le théorème III précédent (F étant non décroissant),

$$\int_a^b \Lambda \, dx \leqslant F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx;$$

d'où l'on tire, en utilisant l'égalité précédente qui a lieu presque partout,

$$\int_a^b (\Lambda - f) \, dx = \int_a^b |\Lambda - f| \, dx \leqslant 0.$$

Donc $\Lambda = f$ presque partout. La même chose a lieu pour les autres nombres dérivés, ce qui prouve le théorème.

Corollaire. — Comme, dans le calcul d'une intégrale, on peut négliger l'ensemble *de mesure nulle* où elle n'a pas pour dérivée la fonction sous signe $\int$, on peut énoncer le théorème suivant (Lebesgue).

Une intégrale indéfinie est l'integrale indéfinie de sa dérivée considérée seulemcnt aux points où elle existe (ou supposée nulle aux autres points).

261. Théorème V. — *Une fonction continue et à variation bornée dans un intervalle, a une dérivée dans presque tout l'intervalle et cette dérivée est sommable considérée là où elle existe* (Lebesgue).

Une fonction semblable est la différence de deux fonctions continues non décroissantes (nº 88). Le théorème, vrai pour ces deux-ci, le sera pour leur différence. Il suffit donc de le démontrer pour une fonction $F(x)$ continue et non décroissante.

Soit Λ_F un des nombres dérivés de $F(x)$; on a, pour h positif, par le théorème III,

$$\int_x^{x+h} \Lambda_F \, dx \leqslant F(x+h) - F(x).$$

Donc la fonction

$$\varphi(x) = F(x) - \int_a^x \Lambda_F \, dx$$

est non décroissante ; et il en sera de même pour la fonction $\psi(x)$, construite avec φ comme φ l'est avec F, à savoir

$$\psi(x) = \varphi(x) - \int_a^x \Lambda_\varphi \, dx.$$

Il vient, par l'addition de ces deux équations,

$$\int_a^x (\Lambda_F + \Lambda_\varphi) \, dx = F(x) - \psi(x).$$

Cette nouvelle équation met en évidence que l'intégrale du premier membre ne croît pas plus rapidement que $F(x)$ et que, par conséquent, son nombre dérivé (de l'espèce Λ) ne surpasse pas Λ_F. Mais ce nombre est $\Lambda_F + \Lambda_\varphi$ presque partout (Théorème IV), donc $\Lambda_\varphi = 0$ presque partout. D'ailleurs, Λ désignant un nombre dérivé d'espèce quelconque, on en conclut que φ a une dérivée nulle presque partout; d'où il suit enfin que la fonction

$$F(x) = \varphi(x) + \int_a^x \Lambda_F \, dx$$

a presque partout la même dérivée que $\int \Lambda_F \, dx$, c'est-à-dire Λ_F (Théorème IV) et cette dérivée est sommable.

Corollaire. — *Une fonction* $F(x)$, *continue et à variation bornée, dont un nombre dérivé* Λ *est fini dans un intervalle, est l'intégrale indéfinie de ce nombre dérivé* (Lebesgue).

On applique le théorème I (n° 257), après avoir remarqué que Λ est sommable, car il est égal presque partout à la dérivée $F'(x)$ qu'on vient de prouver sommable.

262. Construction d'une fonction auxiliaire à dérivée finie. — Soit $F(x)$ une fonction continue à variation bornée dans un intervalle (a, b), ayant donc (n° 261) une dérivée finie $F'(x)$ sauf dans un ensemble E de mesure nulle. Enfermons E (au sens étroit pour tous les points sauf peut-être a et b) dans une infinité d'intervalles α, non empiétants, contenus dans (a, b) et de somme $\Sigma\alpha$ inférieure à un nombre positif ε donné.

Ceci fait, définissons une fonction continue $F_1(x)$, voisine de $F(x)$, par les deux conditions suivantes : 1° Hors des intervalles α et aux extrémités, $F_1(x) = F(x)$; 2° dans l'intérieur des α, $F_1(x)$ varie linéairement de manière à coïncider avec $F(x)$ aux extrémités.

Cette fonction F_1 jouit des propriétés suivantes :

Elle est continue et à variation bornée (car sa variation totale ne peut surpasser celle de F), *elle a des dérivées à droite et à gauche finies dans* (a, b), *mais, en dehors des intervalles* α, *elle a une dérivée unique* $F'(x)$.

Faisons la démonstration en considérant la dérivée à droite seulement. Si x est à l'intérieur (au sens étroit) ou à l'extrémité gauche d'un intervalle α, F_1 varie linéairement et a une dérivée à droite finie.

Dans le cas contraire, x, supposé différent de b, n'est pas un point de E. *Sa dérivée à droite sera* $F'(x)$. En effet, formons les deux quotients :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \qquad \frac{F_1(x+h) - F_1(x)}{h},$$

où h tend vers 0 et dont le premier tend vers $F'(x)$ par hypothèse. Le second est égal au premier si $x + h$ tombe hors des α; et, si $x + h$

tombe dans un α, il est intermédiaire entre les deux valeurs du premier aux extrémités de cet α, valeurs qui ont encore toutes deux pour limite $F'(x)$. Donc le second quotient a pour limite $F'(x)$.

263. Théorème VI. — *Si* $F(x)$ *est continue et à variation bornée dans* (a, b), *on a*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx + V,$$

l'intégrale s'étendant aux points où F' *est finie et déterminée, et* V *désignant la variation de* F *dans l'ensemble* E *des points où* F' *est indéterminée ou infinie.*

Construisons, comme au nº précédent, la fonction a dérivée finie $F_1(x)$ voisine de $F(x)$; nous aurons, par le corollaire du théorème V,

$$F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b F_1'(x)\,dx.$$

Désignons par $C\alpha$ l'ensemble complémentaire des intervalles α par rapport à (a, b), ensemble dans lequel $F_1' = F'$. Comme, d'autre part, F_1 et F coïncident aux points a et b, l'équation précédente peut s'écrire (la sommation s'étendant aux α)

$$F(b) - F(a) = \int_{C\alpha} F'(x)\,dx + \sum_\alpha \int_\alpha F_1'(x)\,dx.$$

Mais, F et F_1 coïncidants aux extrémités des α, nous avons encore, par le théorème V,

$$\int_\alpha F_1'(x)\,dx = \Delta_\alpha F_1 = \Delta_\alpha F$$

et l'équation précédente devient

$$F(b) - F(a) = \int_{C\alpha} F'(x)\,dx + \Sigma\Delta_\alpha F.$$

Faisons tendre $\Sigma\alpha$ vers 0 ; l'intégrale dans $C\alpha$ tend (nº 249, I) vers celle dans (a, b), puisque l'ensemble exclu est de mesure infiniment petite et que cette intégrale existe (nº 261). Donc la dernière somme tend aussi vers une limite, toujours la même, qui sera la variation V de F dans E, et la dernière équation fournit celle du théorème énoncé par un passage à la limite.

264. Théorème VII. — *Les hypothèses sur* F *subsistant, la variation* V *du théorème précédent est la même que celle de* F *dans l'ensemble* E_1 (*contenu dans* E) *des points où l'un* (*toujours le même*), Λ, *des nombres dérivés de* F *est infini.*

Nous allons, en effet, retrouver la formule du théorème précédent en donnant ce nouveau sens à V.

Formons les deux fonctions majorante et minorante, φ_1 et φ_2, infiniment voisines de $\int_a^x \Lambda\, dx$ et faisons une remarque préliminaire. La fonction :

$$F(x) - \varphi_2(x) = F - \int_a^x \Lambda\, dx + \left[\int_a^x \Lambda\, dx - \varphi_2\right]$$

est à variation bornée dans (a, b), et la somme de ses différences ou bien de ses variations totales, respectivement dans des intervalles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de somme $\Sigma\alpha$, est, pour $\Sigma\alpha$ infiniment petit, infiniment voisine de la somme analogue pour la fonction $F(x)$. En effet, considérons la décomposition précédente ; la somme des variations totales de $\int \Lambda\, dx$ qui est absolument continue (nº 251) est infiniment petite avec $\Sigma\alpha$, et la même chose a lieu pour $\int_a^x \Lambda\, dx - \varphi_2$, parce que cette fonction est monotone (nº 256) et infiniment petite.

Ceci posé, enfermons E_1 dans $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ n'empiétant pas. Soit $V_n(x)$ la somme des différences de $F - \varphi_2$ dans ceux des n premiers intervalles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ qui tombent entre a et x et éventuellement dans la portion d'un de ces intervalles encore comprise entre a et x. Soit $T_n(x)$ la somme des variations totales de la même fonction dans les α restants ou portion d'un de ces α, toujours entre a et x. Formons la fonction

$$F(x) - \varphi_2(x) - V_n(x) + T_n(x).$$

Je dis qu'elle est non décroissante. Elle l'est, en effet, dans les n intervalles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ où elle se réduit à T_n qui ne décroît jamais. Elle l'est encore dans les intervalles complémentaires des n précédents, où elle se réduit à

$$F(x) - \varphi_2(x) + T_n(x),$$

parce que son nombre dérivé (de même espèce que Λ) y est partout $\geqslant 0$. Il l'est, en effet, dans chacun des α restants, où la fonction est non décroissante, puisque T_n croît alors comme la variation totale de $F - \varphi_2$; il l'est encore en chaque point hors de ces α, puisque Λ (étant alors fini) surpasse tous les nombres dérivés de φ_2 et que T_n n'a jamais les siens négatifs.

La fonction considérée étant non décroissante dans (a, b), nous avons, dans cet intervalle,

$$F(x) - F(a) > \varphi_2(x) + V_n(x) - T_n(x).$$

Faisons tendre n vers l'infini, puis $\Sigma\alpha$ vers 0 ; T_n a pour limite 0 et, suivant la remarque préliminaire, V_n pour limite la variation $V(x)$ de $F(x)$ dans la portion de E_1 entre a et x. Remplaçons encore φ_2 par sa limite, nous trouvons

$$F(x) - F(a) \geqslant \int_a^x \Lambda\, dx + V(x).$$

Mais l'égalité seule est possible, car on trouve des inégalités de sens contraire en remplaçant φ_2 par φ_1 et T_n par $-T_n$. Il vient donc pour $x=b$, V étant maintenant la variation de F dans E_1,

$$F(b)-F(a)=\int_a^b \Lambda\, dx + V,$$

ce qui montre que V est bien le même que dans le théoréme précédent (car $\Lambda = F'$ presque partout).

265. Théorème VIII. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $F(x)$ *soit l'intégrale indéfinie d'une fonction sommable dans* (a, b), *est qu'elle soit absolument continue dans cet intervalle. Elle est alors l'intégrale indéfinie de sa dérivée considérée là où elle existe.*

En effet, si F est absolument continue, F, étant à variation bornée, a presque partout une dérivée $f(x)$ et l'on a

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(x)\, dx + V,$$

où V est la variation de $F(x)$ dans l'ensemble de mesure nulle où sa dérivée n'est pas finie et déterminée (nº 263). Mais, cette variation étant nulle parce que F est absolument continue, le terme V disparaît. Donc F est une intégrale indéfinie. Réciproquement, nous avons vu (nº 251) qu'une intégrale indéfinie est absolument continue.

Ce théorème entraîne les corollaires suivants :

Corollaire I. — *Une fonction absolument continue dont la dérivée est nulle presque partout dans un intervalle, se réduit à une constante.*

Corollaire II. — *Deux fonctions absolument continues qui ont la meme dérivée presque partout dans un intervalle, ne diffèrent que par une constante dans cet intervalle.*

Ce théorème permet d'étendre immédiatement la règle d'intégration par parties à l'intégrale de Lebesgue.

266. Intégration par parties. — *Soient* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *deux fonctions absolument continues dans un intervalle* (a, b), *on a, dans cet intervalle,*

$$\int_a^x \varphi(x)\,\psi'(x)\, dx = \Big[\varphi(x)\,\psi(x)\Big]_a^x - \int_a^x \psi(x)\,\varphi'(x)\, dx,$$

les dérivées φ' *et* ψ' *étant considérées aux seuls points où elles existent.*

En effet, si φ et ψ sont absolument continues, leur produit $\varphi\psi$ l'est aussi (*) et, par conséquent, les deux membres de l'équation précé-

(*) En effet, si φ et ψ sont de valeurs absolues $< M$, la variation de $\varphi\psi$ ne surpasse pas en valeur absolue le produit par M de la somme des variations absolues de φ et de ψ.

dente ont la même dérivée presque partout. Ils ne diffèrent donc que par une constante et cette constante est nulle, puisque les deux membres s'annulent pour $x = a$.

La règle d'intégration par substitution admet une généralisation aussi étendue que la précédente mais moins immédiate. Nous lui consacrerons un paragraphe spécial, où ce résultat sera établi, pensons-nous, pour la première fois.

§ 3. Intégration par substitution.

267. Remarques préliminaires. — Soit $f(x)$ une fonction sommable dans une intervalle (a, b). Soit ensuite $x = \varphi(t)$ une fonction absolument continue de t, qui varie de $x_0 = \varphi(t_0)$ à $X = \varphi(T)$, sans sortir de l'intervalle (a, b), quand t varie de t_0 à T. Posons, dans ces intervalles,

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx, \qquad \Phi(t) = F[\varphi(t)].$$

Ces fonctions jouissent des propriétés suivantes :

1° *La fonction $\Phi(t)$ est absolument continue.* En effet, si l'on considère une infinité dénombrable de différences de t dont la somme des valeurs absolues tend vers 0, la somme des valeurs absolues des différences correspondantes de $x = \varphi(t)$ tend vers 0 (puisque φ est absolument continue), donc la somme des valeurs absolues des différences correspondantes de $F(\varphi)$ tend aussi vers 0 (puisque Fx est aussi absolument continue). Il suit donc de là, d'une manière générale, qu'*une fonction absolument continue de fonction absolument continue est absolument continue.*

2° La fonction $\Phi(t)$, étant absolument continue, a, presque partout, une dérivée $\Phi'(t)$. Celle-ci est sommable quand on la considère là où elle existe et l'on a (n° 265)

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi'(t)\,dt.$$

3° *En tout point où $\Phi'(t)$ et $\varphi'(t)$ existent et où $\varphi'(t)$ est fini et différent de 0, $F'(\varphi)$ existe aussi et l'on a*

$$\Phi'(t) = F'(\varphi)\,\varphi'(t).$$

Dans la démonstration, supposons, pour fixer les idées, $\varphi'(t)$ positif. Alors les différences correspondantes Δt et $\Delta\varphi$ tendent vers 0 en restant de même signe, et $\Delta\varphi$ passe par toutes les valeurs intermédiaires en même temps que Δt, c'est-à-dire que $\Delta\varphi$ tend arbitrairement vers 0 avec Δt. Considérons le quotient

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta F(\varphi)}{\Delta\varphi}\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Quand Δt tend vers 0, $\Delta\Phi : \Delta t$ et $\Delta\varphi : \Delta t$ ont des limites, la seconde

finie et différente de 0. Il s'ensuit que le troisième rapport $\Delta F : \Delta\varphi$ tend aussi vers une limite déterminée (finie ou infinie), donc que la dérivée $F'(\varphi)$ existe et est égale au quotient des deux autres limites $\Phi'(t)$ et $\varphi'(t)$, ce qui revient à la relation écrite plus haut.

4° *Si $f(x)$ est bornée dans (a, b), $\Phi'(t)$ s'annule en même temps que $\varphi'(t)$.*

C'est ce qui résulte de l'application du théorème de la moyenne à l'intégrale

$$\Delta\Phi = \int_{\varphi(t)}^{\varphi(t+\Delta t)} f(x)\,dx.$$

5° *Si $f(x)$ est bornée, on a* (voir 2°)

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi'(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} F'(\varphi)\,\varphi'(t)\,dt,$$

l'intégrale s'étendant à tous les points où $\varphi'(t)$ existe et à condition de remplacer $F'(\varphi)$ par un nombre fixe, par exemple 1, *aux points où cette dernière dérivée n'existerait pas.*

En effet, avec cette convention, on a presque partout, en vertu du 3° si $\varphi'(t)$ n'est pas nul et du 4° si $\varphi'(t)$ est nul,

$$\Phi'(t) = F'(\varphi)\,\varphi'(t).$$

Si l'on désigne par α l'intervalle d'intégration et par $\Delta_\alpha\Phi(t)$ la différence de Φ dans α, on aura donc, avec la même convention,

$$\Delta_\alpha\Phi(t) = \int_\alpha F'(\varphi)\,\varphi'(t)\,dt,$$

résultat que nous utiliserons tout à l'heure.

268. Théorème. — *Soit $\varphi(t)$ une fonction absolument continue dans un intervalle (t_0, T). Faisons parcourir à t, entre ces limites, un ensemble E_t de mesure non nulle ; si le point $x = \varphi(t)$ varie alors dans un ensemble E_x de mesure nulle, la dérivée $\varphi'(t)$ sera nulle presque partout dans E_t.*

Soit $f(x)$ une fonction égale à 1 dans E_x et à 0 en dehors. Il suffit de prouver la formule

$$\int_{t_0}^{T} f(\varphi)\,|\,\varphi'(t)\,|\,dt = 0\ ;$$

car, puisque $f(x)$ est égale à 1 dans E_t et à 0 ailleurs, cette formule revient à suivante :

$$\int_{E_t} |\,\varphi'(t)\,|\,dt = 0,$$

qui entraîne le théorème énoncé. Proposons-nous donc de démontrer cette formule.

Soit ε un nombre positif arbitraire. Donnons-nous une suite illimitée positive

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n + \cdots < \varepsilon.$$

Ensuite à chaque terme ε_n de cette suite, faisons correspondre une fonction $F_n(x)$, non négative et $< \varepsilon_n$, définie comme il suit :

Puisque E_x est de mesure nulle, nous pouvons l'enfermer (au sens étroit) dans une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas et dont la somme des longueurs est $< \varepsilon_n$. Cela fait, $F_n(x)$ sera, par définition, la somme des longueurs des intervalles et (éventuellement) portion des intervalles précédents qui sont à gauche du point x. D'après cela, $F_n(x)$ est bien une fonction non négative et $< \varepsilon_n$. Elle est non décroissante, absolument continue, à nombres dérivés compris entre 0 et 1 (non exclus) et elle a $f(x) = 1$ pour dérivée dans E_x, c'est-à-dire partout où $f(x)$ n'est pas nul.

Soit P l'ensemble des points de (t_0, T) où $\varphi'(t)$ est > 0, N celui où $\varphi'(t)$ est < 0. L'équation à démontrer revient évidemment aux deux suivantes :

$$\int_P f(\varphi) \mid \varphi'(t) \mid dt = 0, \qquad \int_N f(\varphi) \mid \varphi'(t) \mid dt = 0.$$

Comme elles se démontrent de la même façon, il suffit de prouver la première.

A cet effet, enfermons l'ensemble P dans une infinité dénombrable d'intervalles $\alpha_1, \alpha, \ldots \alpha_n, \ldots$ n'empiétant pas et dont la somme $\Sigma\alpha$ soit suffisamment voisine de mP pour que l'on ait, dans l'ensemble CP complémentaire de P par rapport aux α,

$$\int_{CP} \mid \varphi'(t) \mid dt < \varepsilon,$$

ce qui est possible puisque φ' est sommable (n° 265). Posons

$$\Phi_n(t) = F_n[\varphi(t)] ;$$

et formons la somme des différences de Φ_1 dans α_1, de Φ_2 dans α_2, etc.., c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_n} \Phi_n(t).$$

Ces différences sont respectivement de valeur absolue inférieure à ε_1, à $\varepsilon_2, \ldots$ à $\varepsilon_n, \ldots$ (puisque leurs deux termes sont de mêmes signes et moindres que ces limites), donc on a

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_n} \Phi_n(t) \right| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots < \varepsilon.$$

Désignons maintenant par $F'(t)$, non une véritable dérivée, mais une fonction égale à $F_1'(\varphi)$ dans α_1, à $F_2'(\varphi)$ dans α_2 et, en général, à $F_n'(\varphi)$ dans α_n quand ces dérivées existent, et à 1 dans le cas contraire. Comme les F_k', cette fonction sera comprise entre 0 et 1 (non exclus) et égale à $f(\varphi)$ partout où $f(\varphi)$ n'est pas nul. On aura, en utilisant la remarque 5° du n° 267,

$$\Delta_{\alpha_n} \Phi_n(t) = \int_{\alpha_n} F'(t)\, \varphi'(t)\, dt;$$

et l'inégalité précédente peut s'écrire

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha_n} F'(t)\, \varphi'(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Mais, en réduisant le premier membre à l'intégrale suivante qui est à éléments positifs (ou nuls)

$$\int_P F'(t)\, \varphi'(t)\, dt,$$

on commet une erreur de valeur absolue moindre que

$$\int_{CP} |\, \varphi'(t) \,|\, dt < \varepsilon,$$

car $F'(t)$ ne peut surpasser l'unité. Il vient donc

$$\int_P F'(t)\, \varphi'(t)\, dt < 2\varepsilon.$$

Donc la mesure de l'ensemble des points de P où la fonction positive

$$F'(t)\, \varphi'(t)$$

surpasse un nombre positif ω, est $< \varepsilon : \omega$; et cela est vrai *a fortiori* pour la mesure (extérieure) de l'ensemble des points de P où la fonction

$$f(\varphi)\, \varphi'(t)$$

surpasse ω, car $f(\varphi)$ est nul ou égal à $F'(t)$. Donc, ε étant arbitraire, ce nouvel ensemble est de mesure nulle quel que soit ω, et l'on a

$$\int_P f(\varphi)\, \varphi'(t)\, dt = 0.$$

269. Règle d'intégration par substitution. — *Soit $f(x)$ une fonction finie et sommable dans l'intervalle (a, b) ; ensuite $x = \varphi(t)$ une fonction de t absolument continue et qui varie de $x_0 = \varphi(t_0)$ à $X = \varphi(T)$, sans sortir de l'intervalle (a, b), quand t varie de t_0 à T, on aura*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = \int_{t_0}^{T} f(\varphi)\, \varphi'(t)\, dt,$$

l'intégrale s'étendant seulement aux points où φ' existe, c'est-à-dire presque tous.

Posons

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx, \qquad \Phi(t) = F[\varphi(t)].$$

Supposons d'abord $f(x)$ bornée dans (a, b). Alors on a, par la remarque 5° du n° 267,

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} F'(\varphi)\, \varphi'(t)\, dt,$$

en remplaçant $F'(\varphi)$ par 1 aux points où F' n'existerait pas. Je dis, ce qui prouvera la proposition, que l'on peut remplacer dans cette intégrale $F'(\varphi)$ par $f(\varphi)$.

On sait, en effet, que $F'(x)$ ne diffère de $f(x)$ que dans un ensemble E_x de mesure nulle. Soit E_t l'ensemble des points t pour lesquels $x=\varphi(t)$ appartient à E_x. Si E_t est de mesure nulle, la substitution de f à F' ne modifie pas l'intégrale. Elle ne la modifie pas non plus si E_t n'est pas de mesure nulle, car alors, en vertu du théorème précédent, $\varphi'(t)$ est nul presque partout dans E_t, et la quantité à intégrer n'est encore modifiée par cette substitution que dans un ensemble de mesure nulle.

Considérons, en second lieu, le cas où $f(x)$ n'est pas bornée. D'ailleurs, f étant toujours la différence de deux fonctions non négatives, nous pouvons raisonner sur une fonction f positive.

Soit $f_n(x)$ une fonction bornée auxiliaire, égale à $f(x)$ si $f \leqslant n$ et à n si $f > n$. Pour celle-ci, on a, sans difficulté par la démonstration précédente,

$$\int_{x_0}^{X} f_n(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} f_n(\varphi)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Je dis qu'on obtient la formule à démontrer, par un passage à la limite, en faisant tendre n vers l'infini. En effet, l'intégrale de $f_n(x)$ tend vers celle de $f(x)$ supposé sommable, et l'intégrale de $f_n(\varphi)\,\varphi'(t)$ vers celle de $f(\varphi)\,\varphi(t)$, pourvu que cette fonction soit sommable (n° 250, V) et c'est ce qu'il est facile de vérifier.

En effet, dans l'ensemble où $\varphi'(t)$ n'est pas nul, on a presque partout (n° 267, 3°)

$$\Phi'(t) = F'(\varphi)\,\varphi'(t),$$

et, par suite, aussi

$$\Phi'(t) = f(\varphi)\,\varphi'(t),$$

puisque $F'(\varphi)$ se confond avec $f(\varphi)$ pour presque tous les φ, donc auss-pour presque tous les t n'annulant pas φ' (Théorème précédent).

D'autre part, dans l'ensemble où φ' est nul, on a, puisque f est fini et le second membre nul,

$$|\,\Phi'(t)\,| \geqslant |\,f(\varphi)\,\varphi'(t)\,|\,.$$

En définitive, cette inégalité a lieu presque partout, puisqu'elle est encore exacte dans le cas précédent. On en conclut que, son premier membre étant sommable, le second l'est *à fortiori*.

Remarque. Si $f(x)$ toujours sommable, n'était pas finie, mais devenait infinie dans un ensemble de mesure nulle, la démonstration précédente prouverait seulement que l'on a (f étant positif)

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} \lim_{n=\infty} f_n(\varphi)\,\varphi'(t)\,dt.$$

La formule d'intégration par substitution subsistera donc encore, à condition de considérer le produit $f(\varphi)\,\varphi'(t)$ comme s'annulant avec $\varphi'(t)$ même aux points où $f(\varphi)$ serait infini. Cette circonstance peut évidemment se présenter dans un ensemble de mesure non nulle.

§ 4. Théorèmes sur la dérivée seconde généralisée. Recherche de sa fonction primitive (*).

270. Dérivée seconde généralisée. — Soit $F(x)$ une fonction continue. Posons

$$\Delta^2 F = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x).$$

Quand h tend vers 0, le quotient $\Delta^2 F : h^2$ a une plus grande et une plus petite limites (finies ou infinies). Nous les appellerons *les dérivées secondes généralisées supérieure et inférieure* de $F(x)$ au point x. Si elles sont égales, leur valeur commune est la *dérivée seconde généralisée* de $F(x)$ en ce point et cette dérivée est alors unique.

L'existence d'une dérivée seconde généralisée *unique* n'entraîne pas celle de la dérivée seconde au sens ordinaire. Par contre, *la dérivée seconde généralisée est unique et coïncide avec la dérivée seconde ordinaire en tout point où celle-ci existe.* C'est là un cas particulier du théorème suivant:

Théorème. — *Si* $F(x)$ *admet au point* x *une dérivée première* $F'(x)$ *continue en ce point, les dérivées secondes généralisées supérieure et inférieure sont intermédiaires entre les quatre nombres dérivés du premier ordre de* $F'(x)$ *au même point.*

Ecrivons, en effet,

$$\Delta^2 F = \int_0^h [F'(x+t) - F'(x-t)]\, dt,$$

$$\frac{\Delta^2 F}{h^2} = \int_0^h \frac{2t\,dt}{h^2}\left[\frac{F'(x+t) - F'(x-t)}{2t}\right] dt.$$

Quand h, et t avec lui, tendent vers 0, le crochet dans la dernière intégrale a pour limites d'indétermination des moyennes entre les nombres dérivés à droite ou à gauche de $F'(x)$ au point x. Le théorème énoncé résulte donc de l'application du théorème de la moyenne à cette intégrale.

Nous allons établir maintenant sur les dérivées secondes généralisées quelques théorèmes fondamentaux, analogues à ceux que nous avons exposés au chapitre Ier sur les nombres dérivés du premier ordre, et sur lesquels nous nous appuierons pour déterminer la fonction primitive.

271. Théorème I. — *Si une fonction* $F(x)$ *possède une dérivée seconde généralisée supérieure* POSITIVE (donc non nulle) *en tout point intérieur à l'intervalle* (a, b), *alors, dans cet intervalle, tout arc de la courbe* $y = F(x)$ *est situé au-dessous de sa corde. Au contraire, il serait au-dessus, si la dérivée seconde inférieure était négative.*

(*) *Sur l'Unicité du développement trigonométrique,* par Ch-J. de la Vallée Poussin, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Science), 1912.

Il suffit de démontrer la première partie de l'énoncé qui suppose la dérivée seconde généralisée supérieure *positive.* Soient AMB un arc quelconque de la courbe et AB sa corde. Supposons, par impossible, que cet arc soit en totalité ou en partie au-dessus de AB. La courbe étant continue, il existe au moins un point de la courbe au-dessus de AB tel que sa distance à AB soit la plus grande possible, mais il peut y en avoir plusieurs.

Soit M celui de ces points dont l'abcisse x est la plus grande possible ; soient M′ et M″ deux autres points de la courbe d'abscisses $x-h$ et $x+h$. Désignons par ω un nombre positif plus petit que la dérivée seconde généralisée supérieure au point x et prenons, ce qui est alors possible, h positif assez petit pour satisfaire à la condition

$$\frac{\Delta^2 F}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \frac{F(x-h)-F(x)}{-h} > \omega h > 0.$$

Cette inégalité exprime que le coefficient angulaire de MM″ est plus grand que celui de M′M ou que l'angle M′MM″ a son sommet tourné vers le bas, c'est-à-dirc vers la corde AB. Or ceci est impossible, car, en ce cas, un au moins des deux côtés de cet angle, MM′ ou MM″, serait au-dessus de la parallèle menée par M à AB et l'un des deux points M′ ou M″ serait plus loin que M de AB.

272. Théorème II. — *Soit* $F(x)$ *une fonction continue dans un intervalle. Si l'on peut, sans sortir de cet intervalle, insérire dans la courbe* $y = F(x)$ *une corde* AB *située en totalité ou en partie au-dessous (au-dessus) de l'arc sous-tendu* AMB, *l'ensemble* E *des points où la dérivée seconde généralisée supérieure (inférieure) de* $F(x)$ *est négative (positive), ne peut être de mesure nulle, à moins que cette dérivée généralisée ne soit infinie négative (positive) en un point au moins à l'intérieur de l'intervalle considéré.*

Supposons E de mesure nulle ou même, par impossible, inexistant ; nous allons montrer que la dérivée seconde généralisée supérieure sera infinie négative, au moins en un point, si l'arc AMB passe au-dessus de sa corde.

Construisons, comme dans la remarque du nº 14, une fonction $\varphi(x)$ infinement petite, continue, non décroissante et douée d'une dérivée première infinie positive en tout point de E (supposé existant). Alors la fonction, infiniment petite aussi,

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx$$

possède une dérivée seconde infinie positive en tout point de E ; et d'ailleurs ses dérivées secondes généralisées ne sont négatives nulle part.

Donnons-nous maintenant une constante positive ε infiniment petite et construisons la courbe, infiniment voisine de $y = F(x)$,

$$y = F(x) + \int_a^x \varphi(x)\,dx + \varepsilon\frac{x^2}{2}.$$

Si, par impossible, E était inexistant, on supprimerait cette intégrale.

Cette courbe possède un arc infiniment voisin de AMB, donc, comme lui, en totalité ou en partie au-dessus de sa corde. Il en résulte que la dérivée seconde généralisée supérieure de la fonction

$$F_1(x) = F(x) + \int_a^x \varphi(x)\,dx + \varepsilon\frac{x^2}{2}$$

ne peut être positive pour tous les points intérieurs à l'intervalle considéré, en vertu du théorème précédent. Mais elle ne peut cesser de l'être que dans E, et encore à condition que F ait sa dérivée seconde généralisée infinie, ce qui prouve l'existence de E et le théorème.

On déduit de là le théorème suivant, qui fait connaître dans quelle mesure une fonction est déterminée par une de ses dérivées secondes généralisées.

273. Théorème III. — *Deux fonctions continues,* $F_1(x)$ *et* $F_2(x)$, *dont les dérivées secondes généralisées supérieures sont : 1° finies dans tout l'intervalle* (a, b) *et 2° égales, sauf peut-être dans un ensemble* E *de mesure nulle, ne peuvent différer que par une fonction linéaire dans cet intervalle.*

Une dérivée seconde généralisée supérieure étant une plus grande limite, celle d'une différence vaut au moins la différence de celles de chaque terme. Il suit de là que les deux fonctions :

$$F_1(x) - F_2(x), \qquad F_2(x) - F_1(x),$$

ont leurs dérivées secondes généralisées supérieures *non négatives* sauf dansE, donc partout, car les points de E ne peuvent faire exception en vertu du théorème précédent. Dans ce cas, en vertu du théorème I (n° 271), aucune des deux courbes :

$$y = F_1(x) - F_2(x), \qquad y = F_2(x) - F_1(x),$$

ne peut passer au-dessus d'une de ses cordes et, comme elles sont symétriques par rapport à l'axe des x, elles doivent se confondre avec leurs cordes. Ce sont donc des droites et $(F_1 - F_2)$ est une fonction linéaire.

Corollaire. (Théorème généralisé de Schwarz). — *Une fonction continue dont la dérivée seconde généralisée supérieure (inférieure) est finie partout et nulle presque partout dans un intervalle, est une fonction linéaire.*

274. Condition (K). — Pour aller au delà des résultats précédents, il faut assigner à $F(x)$ une condition nouvelle, tenant la place de celle de continuité pour le théorème de Scheeffer (n° 116). Nous l'appellerons la condition (K) et cette condition se vérifiera en particulier partout où $F(x)$ aura une dérivée première unique et finie.

Nous dirons donc que la fonction continue $F(x)$ satisfait à la condition (K) en un point x, si l'on peut définir deux nombres positifs infini-

ment petits correspondants, h et k, rendant infiniment petite la différence

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\frac{F(x+k)-F(x)}{k}$$

Nous dirons que cette condition a lieu dans un ensemble E ou à l'intérieur d'un intervalle, si elle a lieu en tout point appartenant à l'ensemble ou intérieur à l'intervalle.

Remarque. — Il peut être utile d'observer que, si l'on prend $k=h$, la différence ci-dessus est égale au produit

$$h.\frac{\Delta^2 F}{h^2}.$$

Or on peut faire tendre h vers 0 de manière que $\Delta^2 F : h^2$ tende vers n'importe quelle valeur assignée intermédiaire entre les deux dérivées secondes généralisées de $F(x)$. On en conclut que *les seuls points où la condition* (K) *puisse tomber en défaut sont ceux où la dérivée seconde généralisée de* $F(x)$ *est unique et infinie.*

275. Théorème IV. — *Soit* $F(x)$ *une fonction continue dans un intervalle* (a, b). *Supposons qu'il existe, dans cet intervalle, un arc de la courbe* $y=F(x)$ *passant au-dessus (au-dessous) de sa corde. On sait* (Théorème II) *qu'il existe, dans ce cas, un point au moins dans l'intérieur de* (a, b) *où la dérivée seconde généralisée supérieure de* $F(x)$ *est négative (positive). Soit* E *l'ensemble de tous les points semblables dans l'intérieur de* (a, b). *Si* $F(x)$ *satisfait à la condition* (K) *dans* E, *cet ensemble* E *a, dans tous les cas, la puissance du continu et contient un ensemble parfait, car :*

1° *Si* E *n'est pas de mesure nulle, il contient un ensemble parfait de mesure non nulle* (*).

2° *Si* E *est de mesure nulle, la portion de* E *où* $F(x)$ *a une dérivée seconde généralisée unique et infinie négative (positive), a déjà la puissance du continu et contient un ensemble parfait.*

Il suffit de prouver le 2° et d'en faire la démonstration dans l'hypothèse où l'arc passe au-dessus de la corde.

A cet effet, revenons à la courbe, infiniment voisine de $y=F(x)$, déjà considérée dans la démonstration du théorème II,

$$y=F(x)+\int_a^x \varphi(x)\,dx+\varepsilon\frac{x^2}{2},$$

(*) C'est là une proposition générale sur les ensembles, facile à vérifier. Soit l'ensemble E contenu dans (a, b) et de mesure 2ε. Enfermons son complémentaire par rapport à (a, b) dans des intervalles α de manière que $\Sigma\alpha$ soit $<(b-a)-\varepsilon$; l'ensemble des points de (a, b) non intérieurs aux α est parfait, de mesure ε et contenu dans E.

et pour laquelle il existe aussi un arc AMB situé au-dessus de sa corde AB. Posons

$$F_1(x) = F(x) + \int_a^x \varphi(x)\, dx + \varepsilon \frac{x^2}{2}.$$

La fonction F_1 a sa dérivée seconde généralisée supérieure positive et $> \varepsilon$ en tout point où celle de $F(x)$ n'est pas infinie négative. Donc celle-ci doit être infinie négative en tout point où l'on a $\Delta^2 F_1 \leqslant 0$ pour h infiniment petit, et nous allons d'abord montrer que l'ensemble E_1 de ces points a la puissance du continu.

Soit, au-dessus de AB, M le point de l'arc AMB dont la distance à AB est la plus grande possible et qui a la plus grande abscisse. Nous aurons en ce point, pour h infiniment petit,

$$\Delta^2 F_1 \leqslant 0,$$

de sorte que M est un point de E_1 (donc de E) et la condition (K) y est vérifiée pour F (et, par conséquent, aussi pour F_1). Menons à AB par le point M la parallèle MT ; ce sera la *tangente* à la courbe AMB au point M, en convenant d'appeler ici (par extension) *tangente* une droite qui passe par M sans traverser la courbe ; et il ne peut pas y en avoir deux, car elles enfermeraient la courbe dans un angle, ce qui est contraire à la condition (K). Cette tangente sera d'ailleurs tout entière au-dessus de l'arc AMB.

Soit maintenant AB′ une seconde corde, obtenue en faisant tourner la première dans le sens direct autour du point A, d'ailleurs suffisamment voisine de la première pour qu'il reste encore des points de l'arc au-dessus de AB′. Soit M′ celui de ces points qui est à la distance la plus grande de AB′ et qui a la plus grande abscisse ; au point M′ la *tangente* sera parallèle à AB′ et l'on aura, pour h infiniment petit, $\Delta^2 F_1 \leqslant 0$.

A chaque corde AB″ intermédiaire entre AB et AB′, correspond ainsi un point M″ différent (la tangente y étant différente) où $\Delta^2 F_1 \leqslant 0$. Donc l'ensemble E_1 des points où cette condition a lieu, a, comme nous l'avons annoncé, la puissance du continu.

Nous allons montrer maintenant qu'il contient un ensemble parfait.

Commençons par une remarque préalable. Le point M′ que nous avons construit est *à gauche* du point M, car M, étant plus éloigné de AB que les points de la courbe situés à sa droite, est aussi plus éloigné qu'eux de la droite AB′. Cette remarque s'applique pour deux cordes quelconques. Soit donc θ l'inclinaison d'une corde variable AB″, le point M″ correspondant se déplace toujours vers la gauche quand θ augmente.

Il suit de là que le point M″ tend vers une position limite μ quand θ tend vers θ_0 et que la tangente M″T tend, en même temps, vers une position limite μT d'inclinaison θ_0. D'ailleurs, la tangente variable M″T

étant au-dessus de l'arc AMB, sa limite μT l'est aussi et la condition $\Delta^2 F_i \leqslant 0$ subsiste au point μ. Cette condition est donc réalisée dans l'ensemble décrit par le point M'' et aux points-limites de cet ensemble, donc dans un ensemble fermé qui, ayant la puissance du continu, contient un ensemble parfait (nº 61).

Corollaire. — *Soit* $F(x)$ *une fonction continue dans l'intervalle* (a, b), *à l'intérieur duquel elle vérifie en outre la condition* (K) ; *si l'ensemble* E *des points où une dérivée seconde généralisée de* $F(x)$ *est d'un même signe, est de mesure nulle, la portion de* E *où la dérivée seconde généralisée de* $F(x)$ *est unique et infinie, a la puissance du continu et contient un ensemble parfait.*

Soit E l'ensemble des points où la dérivée considérée a le même signe qu'au point x, par exemple le signe négatif ; $\Delta^2 F$ sera négatif pour un système de trois points $x-h$, x et $x+h$ suffisamment rapprochés. Soient M', M et M'' les points correspondants de la courbe : le point M sera au-dessus de la corde M'M'', ce qui ramène au théorème précédent.

276. Théorème V. (Construction de la primitive). — *Soit* $F(x)$ *une fonction continue dans un intervalle* (a, b). *S'il existe une fonction* $f(x)$ *intermédiaire entre les deux dérivées secondes généralisées de* $F(x)$ *ou égale à l'une des deux, laquelle fonction* $f(x)$ *soit finie et sommable dans l'intervalle* (a, b), *on aura, dans cet intervalle,*

$$F(x) = \int_a^x dx \int_a^x f(x)\, dx + \text{fonction linéaire de } x.$$

En effet, construisons, relativement à l'intégrale

$$\int_a^x f(x)\, dx,$$

les deux fonctions, majorante $\varphi_1(x)$, et minorante $\varphi_2(x)$, du théorème du nº 255. Formons alors les deux fonctions nouvelles :

$$F(x) - \int_a^x \varphi_2(x)\, dx, \qquad F(x) - \int_a^x \varphi_1(x)\, dx,$$

lesquelles sont infiniment voisines l'une de l'autre et comprennent entre elles la fonction

$$F(x) - \int_a^x dx \int_a^x f(x)\, dx,$$

qui est inférieure à la première et supérieure à la seconde. Ces trois fonctions s'annulent pour $x = a$.

Construisons, entre les points d'abscisses a et b, les arcs AM_1B_1, AMB, AM_2B_2 des trois courbes infiniment voisines :

$$y_1 = F(x) - \int_a^x \varphi_2(x)\, dx,$$

$$y = F(x) - \int_a^x dx \int_a^x f(x)\, dx,$$

$$y_2 = F(x) - \int_a^x \varphi_1(x)\, dx.$$

Nous avons $y_1 > y > y_2$, et les trois cordes AB_1, AB, AB_2 sont infiniment voisines, mais AB est au-dessous de AB_1 et au-dessus de AB_2.

Rappelons n° (255) que les nombres dérivés des fonctions continues $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont respectivement tous $> f(x)$ ou tous $< f(x)$; il en résulte, en vertu du théorème du n° 270, que la dérivée seconde généralisée supérieure de y_1 sera plus grande que celle de $F(x)$ diminuée de $f(x)$ et, par conséquent, positive. De même, la dérivée seconde généralisée inférieure de y_2 sera négative.

Appliquons donc le théorème I ; l'arc AM_1B_1 est au-dessous de sa corde et l'arc AM_2B_2 est au-dessus de la sienne. Donc l'arc intermédiaire AMB est *a fortiori* compris entre les deux cordes AB_1 et AB_2.

Ainsi l'arc AMB, qui est invariable et compris entre deux droites infiniment voisines de la droite AB, ne peut différer de cette dernière droite. Soit $y = px + q$ l'équation de cette droite ; nous avons donc

$$F(x) - \int_a^x dx \int_a^x f(x)\,dx = px + q,$$

ce qui prouve le théorème.

277. Théorème VI. — *Si la fonction $f(x)$ du théorème précédent n'est pas finie partout, mais devient infinie dans un ensemble* E, *la conclusion de ce théorème* V *subsiste, pourvu que* $F(x)$ *satisfasse à la condition* (K) *dans l'intérieur de l'intervalle* (a, b), *et que l'ensemble* E *n'ait pas la puissance du continu, ou encore ne contienne pas d'ensemble parfait* (donc, en particulier, si E est dénombrable).

En effet, nos conclusions de la démonstration précédente touchant les signes de y_1 et de y_2 ne pourraient tomber en défaut que dans l'ensemble E. Mais, en vertu du théorème IV, cela ne peut modifier la situation relative des arcs et des cordes considérés dans la démonstration. Donc les conclusions subsistent.

278. Remarque. — Si les hypothèses de l'un des deux théorèmes précédents ont lieu, il en résulte que $F(x)$ aura partout une dérivée première continue et presque partout une dérivée seconde, à savoir respectivement

$$F'(x) = \int_a^x f(x)\,dx + p, \qquad F''(x) = f(x).$$

CHAPITRE VIII.

Formules fondamentales de la théorie des courbes planes.

---

§ 1. Tangente et normale aux courbes planes.

279. Représentation analytique d'une courbe plane. — En premier lieu, une courbe plane peut être considérée comme le lieu des points du plan dont les coordonnées cartésiennes x et y sont liées par une équation

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Nous appellerons *point ordinaire* de la courbe, tout point où les deux dérivées partielles F'_x et F'_y sont continues et ne s'annulent pas simultanément. Les autres points de la courbe sont des *points singuliers* ; nous les supposerons, s'il en existe, isolés les uns des autres.

Dans le voisinage d'un point ordinaire où F'_y n'est pas nul, l'équation (1) définit une fonction implicite y de x (n° 169) ; on peut donc résoudre l'équation (1) par rapport à y et la ramener, au moins implicitement, à la forme

$$y = f(x), \tag{2}$$

la fonction $f(x)$ ayant, suivant les principes de dérivation des fonctions implicites, une dérivée continue $-F'_x : F'_y$.

Si F'_y s'annulait en un point ordinaire, F'_x ne s'annulerait pas ; la résolution de l'équation pourrait se faire par rapport à x considérée comme fonction de y et l'on aurait une conclusion analogue à la précédente.

Nous mettrons le plus souvent l'équation de la courbe sous la forme (2). Nous supposerons alors l'existence ou la continuité des dérivées de $f(x)$ jusqu'à un certain ordre qui sera indiqué dans chaque cas particulier. Nos formules s'étendront aux équations de la forme (1), en vertu des règles de dérivation des

fonctions implicites, à condition de nous borner aux points ordinaires de la courbe et de supposer l'existence ou la continuité des dérivées partielles de F jusqu'à l'ordre requis pour les dérivées de f.

En second lieu, on peut considérer une courbe plane comme le lieu des positions successives d'un point mobile. On est alors conduit à exprimer les coordonnées x et y de ce point en fonctions continues d'un paramètre variable t. La courbe est alors définie par deux équations

$$(3) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

et l'on dit que ces formules fournissent une *représentation paramétrique* de la courbe. Quand nous ferons usage de cette représentation, nous supposerons que les fonctions φ et ψ sont continues ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à un certain ordre.

Nous appellerons *points ordinaires* de la courbe, ceux où l'une au moins des deux dérivées $\varphi'(t)$ ou $\psi'(t)$ est différente de 0.

En supposant que t devienne égal à x, on reviendra, comme cas particulier, du mode de représentation (3) au mode de représentation (2).

Une courbe étant donnée sous la forme (3), il suffit d'éliminer t pour mettre son équation sous la forme (1). L'élimination pourra toujours se faire si l'une des deux équations est résoluble par rapport à t, car il suffira, cette résolution faite, de porter la valeur de t dans l'autre équation. C'est ce qui a toujours lieu en un point ordinaire.

280. Tangente en coordonnées cartésiennes. — Considérons d'abord une courbe plane, rapportée à des axes rectangulaires ou obliques, et dont l'équation soit de la forme

$$y = f(x),$$

la fonction $f(x)$ ayant une dérivée déterminée et finie.

La tangente en un point M de la courbe est, comme on le sait déjà (n° 92), la limite d'une sécante qui passe par M et un autre point M' de la courbe qui se rapproche indéfiniment du premier. Soient x, y les coordonnées de M, $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$ celles de M' ; l'équation de la sécante sera, en coordonnées courantes ξ, η,

$$(4) \qquad \eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\xi - x).$$

Faisons tendre le point M′ vers M ; Δx et Δy tendent vers 0 et leur quotient vers la dérivée, y', de y par rapport à x. L'équation de la tangente au point M sera donc

$$\eta - y = y'(\xi - x). \tag{5}$$

On met l'équation de la tangente sous forme symétrique en remplaçant y par $dy : dx$ dans l'équation (5) ; elle devient ainsi

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy}. \tag{6}$$

Cette nouvelle forme est indépendante du mode de représentation de la courbe.

Supposons, en second lieu, que l'équation de la courbe soit de la forme plus générale

$$F(x, y) = 0.$$

Si M est un point ordinaire, une des deux dérivées F'_y ou F'_x, par exemple F'_y, est différente de zéro. On peut, en vertu de l'équation précédente, considérer y comme fonction de x, et l'on trouve, en dérivant totalement l'équation,

$$F'_x + y'F'_y = 0.$$

Remplaçant y' par sa valeur $-F'_x : F'_y$, l'équation (5) devient

$$(\xi - x)F'_x + (\eta - y)F'_y = 0. \tag{7}$$

Cette forme de l'équation de la tangente est également symétrique en x et en y. Elle donne lieu au théorème suivant :

En tout point ordinaire d'une courbe $F(x, y) = 0$, *existe une tangente unique et bien déterminée. Son équation s'obtient en différentiant totalement celle de la courbe et en remplaçant* dx *par* $\xi - x$ *et* dy *par* $\eta - y$.

On remarquera que l'équation (7) devient illusoire en un point singulier, car F'_x et F'_y s'annulent à la fois et l'équation devient identique.

Considérons maintenant une représentation paramétrique

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

et cherchons la tangente en un point ordinaire M de cette courbe.

L'équation de la sécante MM′ est

$$\frac{\xi - x}{\Delta x} = \frac{\eta - y}{\Delta y}.$$

Divisons les dénominateurs par l'accroissement Δt qu'il faut donner au paramètre pour passer de M à M' ; faisons tendre Δt vers 0, donc M' vers M, et passons à la limite. Les quotients $\Delta x : \Delta t$ et $\Delta y : \Delta t$ tendent vers les dérivées supposées existantes, x' et y', de x et de y par rapport à t. L'équation de la tangente sera donc, puisque x' et y' ne sont pas nuls tous deux,

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'}. \tag{8}$$

281. Normale en coordonnées rectangulaires. — La normale en un point M de la courbe est la perpendiculaire à la tangente en ce point. Supposons les axes rectangulaires. Alors les coefficients angulaires de la tangente et de la normale sont inverses et de signes contraires. On peut donner à l'équation de la normale diverses formes correspondant à celles de la tangente.

La première correspond à l'équation (6) et est indépendante du mode de représentation de la courbe, c'est

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0. \tag{9}$$

Si l'on considère y comme une fonction de x ayant pour dérivée y', l'équation de la normale, sous la forme qui correspond à (5), sera

$$\eta - y = -\frac{\xi - x}{y'}. \tag{10}$$

Si la courbe a pour équation $F(x, y) = 0$, celle de la normale en un point ordinaire x, y sera

$$\frac{\xi - x}{F'_x} = \frac{\eta - y}{F'_y}. \tag{11}$$

Enfin, si x et y sont considérés comme fonctions de t, l'équation de la normale, sous la forme qui correspond à (8), sera

$$(\xi - x)\,x' + (\eta - y)\,y' = 0. \tag{12}$$

282. Calcul de quelques segments remarquables. — Certains segments, définis au moyen de la tangente et de la normale, se rencontrent naturellement dans l'étude des courbes planes ; nous les calculerons d'abord dans l'hypothèse d'une *représentation paramétrique,* c'est-à-dire en considérant x et y comme fonctions de t.

La *sous-tangente* S_t est le segment PT de l'axe des x (fig. 4), compté avec un signe déterminé du pied de l'ordonnée du point M jusqu'au point où la tangente coupe l'axe des x. Les sens positifs et négatifs sont les mêmes que pour les abscisses. La sous-tangente s'obtient donc en faisant $\eta = 0$ dans l'équation (8) de la tangente et en tirant de là la valeur de $\xi - x$. Il vient ainsi (en coordonnées rectangulaires ou obliques)

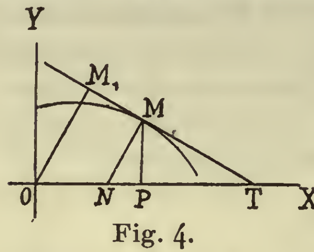


Fig. 4.

$$(13) \qquad S_t = -\frac{yx'}{y'}.$$

La *sous-normale* S_n se définit par rapport à la normale comme S_t par rapport à la tangente. C'est le segment PN dans la figure. Sa valeur s'obtient en posant $\eta = 0$ dans l'équation (12) et en tirant de là la valeur de $\xi - x$. Il vient (en coordonnées rectangulaires) :

$$(14) \qquad S_n = \frac{yy'}{x'}.$$

Les longueurs T *et* N *de la tangente et de la normale* sont les longueurs absolues MT et MN, comprises sur ces droites entre la courbe et l'axe des x. On a donc (en coordonnées rectangulaires) :

$$(15) \qquad \begin{cases} T = \sqrt{S_t^2 + y^2} = \pm \dfrac{y}{y'}\sqrt{x'^2 + y'^2}, \\ N = \sqrt{S_n^2 + y^2} = \pm \dfrac{y}{x'}\sqrt{x'^2 + y'^2}. \end{cases}$$

La distance P *de l'origine à la tangente* se tire de l'équation de cette droite par un principe bien connu de géométrie analytique. On conclut de l'équation (8) (en coordonnées rectangulaires) :

$$(16) \qquad P = \pm \frac{x'y - y'x}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Si, au lieu de considérer x et y comme fonctions de t, on considère y comme fonction de x, il faut faire $x' = 1$ dans les formules précédentes. On trouve les expressions plus simples :

$$(17) \qquad \begin{cases} S_t = -\dfrac{y}{y'}, \quad S_n = yy', \quad T = \pm \dfrac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}, \\ N = \pm y\sqrt{1 + y'^2}, \quad P = \pm \dfrac{y - y'x}{\sqrt{1 + y'^2}}. \end{cases}$$

283. Applications (coordonnées rectangulaires). — I. Parabole : $y^2 = 2px$. Considérant y comme fonction de x, on a $yy' = p$. On trouve donc

$$\text{Tangente : } \eta y = p(\xi + x)\ ;$$
$$\text{Normale : } (\xi - x)\, y + (\eta - y)\, p = 0.$$

Les formules (17) donnent ensuite :

$$S_t = -\frac{y^2}{p} = 2x, \quad S_n = p, \quad T = \frac{y}{p}\sqrt{p^2+y^2}, \quad N = \sqrt{p^2+y^2}.$$

Donc, *dans la parabole, la sous-normale est constante.*

II. Ellipse : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. On trouve :

$$\text{Tangente : } \frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1\ ;$$
$$\text{Normale : } \frac{a^2\xi}{x} - \frac{b^2\eta}{y} = a^2 - b^2 = c^2.$$

On se sert aussi de la représentation paramétrique :

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t.$$

On trouve, par les formules (13), (14), (15) et (16) :

$$S_t = a \sin t \operatorname{tg} t, \quad S_n = -\frac{b^2}{a}\cos t, \quad T = \operatorname{tg} t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t},$$
$$N = \frac{b}{a}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}, \qquad P = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}},$$

d'où $PN = b^2$.

III. Hyperbole : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. On trouve :

$$\text{Tangente : } \frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = 1\ ;$$
$$\text{Normale : } \frac{a^2\xi}{x} + \frac{b^2\eta}{y} = a^2 + b^2 = c^2.$$

IV. Logarithmique : $y = ae^{mx}$. *La sous-tangente est constante.* On trouve, en effet, par la première des formules (17),

$$S_t = -\frac{1}{m}.$$

V. Cycloïde. — La cycloïde (fig. 5) est décrite par un point M de la circonférence d'un cercle de rayon a qui roule sans glisser sur une droite fixe OX. Prenons cette droite pour axe

des x, pour axe des y la perpendiculaire menée par le point décrivant au moment où il se trouve sur OX. Considérons une autre position du cercle générateur. Soit OA la quantité dont le point de contact s'est déplacé sur l'axe des x.

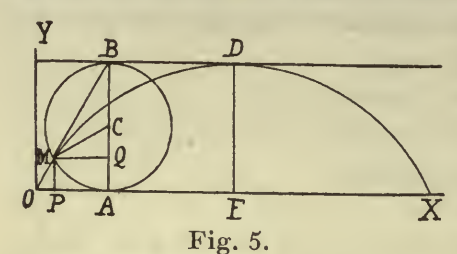


Fig. 5.

D'après la définition du roulement, il s'est déplacé de la même quantité sur le cercle. Donc l'arc AM entre le point de contact et le point décrivant est égal à AO. Cela posé, soit t l'angle variable des rayons CA et CM. Exprimons x et y en fonction de t. Nous avons $OA = AM = at$; d'où

$$(18) \qquad \begin{cases} x = OA - MQ = a(t - \sin t), \\ y = AC - QC = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Ces équations fournissent une représentation paramétrique de la cycloïde. Elles montrent que la cycloïde se compose d'une suite illimitée d'*arcades* égales, situées au-dessus de OX, ayant respectivement pour hauteur le diamètre $2a$, et pour base la circonférence $2a\pi$ du cercle générateur.

Nous avons, dans le cas actuel,

$$x' = a(1 - \cos t) = y, \qquad y' = a \sin t,$$

et la valeur de la sous-normale s'en déduit :

$$S_n = \frac{yy'}{x'} = y' = a \sin t.$$

Donc S_n est égale à la projection du rayon MC sur l'axe des x et, par conséquent, la normale passe par le point de contact du cercle générateur avec cet axe.

284. Podaire d'une courbe plane. — On appelle *podaire* d'une courbe par rapport à un point O le lieu géometrique du pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la tangente.

Supposons que la courbe ait pour équation $F(x, y) = 0$. Pour trouver celle de la podaire par rapport à l'origine, il faut éliminer x et y entre l'équation de la courbe et les deux suivantes :

$$(\xi - x) F'_x + (\eta - y) F'_y = 0, \qquad \xi F'_y - \eta F'_x = 0,$$

qui sont celles de la tangente et de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente. La relation qui en résulte entre ξ et η est l'équation de la podaire.

Exemple. Les *courbes de Lamé* ou *courbes triangulaires symétriques* ont pour équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1.$$

Les équations de la tangente et de la perpendiculaire issue de l'origine sont :

$$\frac{\xi}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} + \frac{\eta}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1} = 1, \qquad \frac{a\xi}{\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1}} = \frac{b\eta}{\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}}.$$

On tire de la seconde, par les propriétés des fractions égales,

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{\frac{\xi}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} + \frac{\eta}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}} = \left[\frac{(a\xi)^{\frac{m}{m-1}} + (b\eta)^{\frac{m}{m-1}}}{\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m}\right]^{\frac{m-1}{m}}$$

L'élimination de x et y est donc immédiate. La podaire par rapport à l'origine a pour équation

$$(\xi^2+\eta^2)^{\frac{m}{m-1}} = (a\xi)^{\frac{m}{m-1}} + (b\eta)^{\frac{m}{m-1}}.$$

L'*ellipse* et l'*hyperbole* en particulier, qui ont pour équations :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

auront pour podaires par rapport au centre :

$$(\xi^2+\eta^2)^2 = (a\xi)^2 + (b\eta)^2, \qquad (\xi^2+\eta^2)^2 = (a\xi)^2 - (b\eta)^2,$$

car on passe de l'éllipse à l'hyperbole par le changement de b en bi.

Si l'hyperbole est équilatère, $a = b$; sa podaire devient

$$(\xi^2+\eta^2)^2 = a^2(\xi^2-\eta^2).$$

C'est une *lemniscate de Bernoulli*, dont l'équation en coordonnées polaires est $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

285. Coordonnées polaires. — Soient r et θ le rayon vecteur et l'argument d'un point du plan ; une courbe plane peut aussi être définie par une relation,

$$F(r, \theta) = 0,$$

entre les coordonnées d'un quelconque de ses points. Nous supposerons généralement que cette équation peut être résolue par rapport à r. L'équation de la courbe prend alors la forme

$$r = f(\theta).$$

Nous supposerons $f(\theta)$ dérivable et nous désignerons sa dérivée par r'.

Soient r et θ les coordonnées d'un point particulier M de la courbe (fig. 6). Menons la tangente en ce point. Abaissons du pôle la perpendiculaire OP sur la tangente. Soient p la longueur de cette droite et α l'angle qu'elle fait avec l'axe OX. L'équation de la tangente, en coordonnées courantes ρ, τ, sera

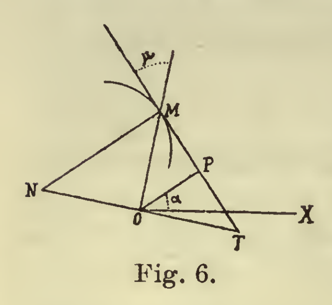


Fig. 6.

$$\rho \cos(\tau - \alpha) = p.$$

Il s'agit de déterminer α et p. La tangente passant par les points (r, θ) et $(r + dr, \theta + d\theta)$, on a les deux équations :

$$r \cos(\theta - \alpha) = p, \qquad d.\, r \cos(\theta - \alpha) = 0.$$

On tire de la seconde, divisée par $d\theta$;

$$\operatorname{tg}(\theta - \alpha) = \frac{r'}{r} ;$$

d'où

$$\frac{\cos(\tau - \alpha)}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{\cos[(\tau - \theta) + (\theta - \alpha)]}{\cos(\theta - \alpha)} = \cos(\tau - \theta) - \frac{r'}{r}\sin(\tau - \theta).$$

L'équation de la tangente au point (r, θ) devient donc, par l'élimination de α et p,

$$(19) \qquad \frac{r}{\rho} = \cos(\tau - \theta) - \frac{r'}{r}\sin(\tau - \theta).$$

Soit μ l'angle du rayon vecteur OM avec la tangente menée dans le sens où θ va en croissant. Cet angle est le complémentaire de $(\theta - \alpha)$. Comme il est compris entre 0 et π, il est complètement déterminé par la formule

$$(20) \qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'}.$$

La *sous-tangente* S'_t et la *sous-normale* S'_n en coordonnées polaires sont les valeurs algébriques des segments OT et ON (fig. 6) compris, sur la normale au rayon vecteur, entre le pôle et la tangente ou la normale. On a

$$(21) \qquad S'_t = \frac{r^2}{r'}, \qquad S'_n = r'.$$

Les segments ainsi calculés auront le signe de tgμ. On voit facilement qu'ils seront positifs ou négatifs, suivant qu'il faut faire tourner le rayon OM d'un angle droit dans le sens positif ou dans le sens négatif pour l'amener dans la direction de ON.

La tangente T' et la normale N' en coordonnées polaires sont les portions MT et MN de la tangente et de la normale comprises entre le point M et la perpendiculaire NOT menée par l'origine au rayon vecteur. Leurs expressions, qui doivent être prises positivement, sont

$$(22)\quad T' = \frac{r}{\cos\mu} = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2}, \qquad N' = \frac{r}{\sin\mu} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

La perpendiculaire abaissée du pôle sur la tangente a pour longueur p et pour inclinaison α ; on a

$$(23)\quad \begin{cases} p = r\cos(\theta - \alpha) = \dfrac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}, \\ \alpha = \theta - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{r'}{r}. \end{cases}$$

En éliminant θ entre les deux équations $\rho = p$ et $\tau = \alpha$, où les seconds membres seront exprimés en fonctions de θ, on obtiendra, entre ρ et τ, l'équation de la podaire de la courbe par rapport au pôle.

Applications. — I. *Spirale d'Archimède* : $r = a\theta$. On a

$$r' = a, \qquad S'_n = a, \qquad S'_t = a\theta^2 = r\theta.$$

Donc, dans la spirale d'Archimède, la sous-normale polaire est constante et la sous-tangente au point (r, θ) a même longueur qu'un arc de cercle de rayon r et d'ouverture θ. En particulier, la sous-tangente au premier point où la spirale recoupe l'axe polaire a même longueur que la circonférence décrite avec le rayon vecteur de ce point (Archimède).

II. *Spirale logarithmique* : $r = ae^{m\theta}$. On a

$$r' = mr, \qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{1}{m}, \qquad S'_t = \frac{r}{m}, \qquad S'_n = mr,$$

$$p = \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}}, \qquad \alpha = \theta - \mu.$$

Donc : 1° La spirale logarithmique coupe le rayon vecteur sous un angle constant μ ; 2° les points T et N (fig. 6) décrivent des spirales

semblables à la proposée ; 3° la podaire a pour équation

$$\rho = \frac{ae^{m(\tau+\mu)}}{\sqrt{1+m^2}} = a_1 e^{m\tau}$$

et c'est aussi une spirale semblable à la proposée.

EXERCICES.

1. Tangente, normale et segments correspondants pour l'hyperbole rapportée à ses asymptotes : $xy = a^2$.

2. Dans un cercle de rayon a, on mène un diamètre OO′ et la tangente à l'une des extrémités O′. Par l'autre extrémité O, on mène une sécante quelconque coupant le cercle en P et la tangente en Q. On retranche de OQ un segment QM égal à OP. Le lieu du point M est une *cissoïde de Dioclès*. Trouver son équation, la tangente, la normale, etc.

R. On prend O comme pôle, OO′ comme axe polaire. L'équation est, en coordonnées polaires,

$$r = 2a\,(\sec\theta - \cos\theta) :$$

et, en coordonnées cartésiennes,

$$y^2 = x^3 : (2a - x).$$

3. Un cercle de rayon a roule sur une droite OX ; un point fixé à ce cercle décrit une *cycloïde allongée* s'il est intérieur au cercle, une *cycloïde raccourcie* s'il est extérieur. Trouver les équations de ces courbes, la tangente, la normale, etc.

R. Conservons les notations du n° 283 (V). Soit, en plus, h la distance du point décrivant au centre du cercle. On a

$$x = at - h\sin t, \qquad y = a - h\cos t.$$

La normale à la courbe passe encore par le point de contact du cercle et de la droite.

4. Un cercle de rayon b roule extérieurement sur un cercle de rayon a. On considère trois points, M, M′ et M″, fixés au cercle mobile, le premier sur la circonférence, le second dans l'intérieur, le troisième à l'extérieur du cercle. Le point M décrit une *épicycloïde*, le point M′ une *épicycloïde allongée*, le point M″ une *épicycloïde raccourcie*. Trouver les équations de ces courbes, la tangente, la normale, etc.

R. Prenons pour origine le centre du cercle fixe, pour axe des x le diamètre passant par le point décrivant au moment où il est le plus près du centre fixe. Soient h la distance du point décrivant au centre mobile et t l'angle dont a tourné le rayon vecteur mené du centre fixe au point de contact. On aura

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - h\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\,t\right), \\ y = (a+b)\sin t - h\sin\left(\dfrac{a+b}{b}\,t\right). \end{cases}$$

La normale passe par le point de contact des deux cercles.

5. Même problème, le roulement se faisant intérieurement. Les courbes sont alors des *hypocycloïdes*.

R. Leurs équations s'obtiennent en changeant dans les précédentes h en $-h$ et b en $-b$. On a

$$\left\{\begin{aligned} x &= (a-b)\cos t + h\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right),\\ y &= (a-b)\sin t - h\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right).\end{aligned}\right.$$

6. La *cardioïde* (courbe en forme de cœur) est l'épicycloïde engendrée par le roulement de deux cercles de même rayon a. Si l'on prend pour pôle le point décrivant au moment où il coïncide avec le point de contact, l'équation de la courbe est, en coordonnées polaires,

$$r = 2a(1-\cos\theta).$$

Déterminer les éléments de cette courbe et sa podaire.

R. On trouve

$$\mu = \alpha = \frac{\theta}{2}, \qquad S'_t = r \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \qquad S'_n = 2a\sin\theta,$$

$$T' = r : \cos\frac{\theta}{2}, \qquad N' = r : \sin\frac{\theta}{2}, \qquad p = r\sin\frac{\theta}{2}.$$

La podaire a pour équation

$$\rho = 4a\sin^3\tau.$$

7. Podaire d'une circonférence de rayon a par rapport à un point de la courbe.

R. La courbe est une cardioïde (Exercice précédent).

8. Podaires de la parabole par rapport : 1° au foyer ; 2° au sommet.

R. La première est la tangente au sommet ; la seconde une *cissoïde* (Exercice 2).

§ 2. Longueur d'un arc de courbe plane. Inclinaison de la tangente.

286. Longueur d'un arc de courbe plane. — Considérons une courbe

$$y = f(x),$$

rapportée à des axes rectangulaires. La longueur s d'un arc compris entre les points dont les coordonnées sont $x = a$, $y = f(a)$ et $x = b$, $y = f(b)$, est, par définition, la limite du périmètre d'un polygone inscrit, dont les sommets se suivent dans un sens déterminé, lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment et que chacun des côtés tend vers zéro.

Nous allons montrer, en admettant que $f(x)$ a une dérivée continue $f'(x)$, que cette limite est déterminée et s'exprime par une intégrale définie.

Prenons, à cet effet, sur l'arc considéré, $n + 1$ points (y compris ses extrémités) et désignons les coordonnées de l'un quelconque d'entre eux par x_i et y_i, de sorte que, les abscisses étant numérotées par ordre de grandeur, x_1 et y_1 seront les coordonnées a et $f(a)$ de l'origine, x_{n+1} et y_{n+1} les coordonnées b et $f(b)$ de l'extrémité.

Inscrivons le polygone qui a ces $(n + 1)$ points pour sommets. Le côté c_i qui joint (x_i, y_i) à (x_{i+1}, y_{i+1}) a pour mesure

$$c_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Mais la formule des accroissements finis donne, ξ_i étant intermédiaire entre x_i et x_{i+1},

$$y_{i+1} - y_i = f'(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i).$$

Il vient donc

$$c_i = (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}.$$

Lorsque les côtés du polygone tendent vers zéro, les différences $x_{i+1} - x_i$ tendent aussi vers zéro. Il vient

$$s = \lim \sum_1^n c_i = \lim \sum_1^n (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}.$$

Cette limite est, par définition (n° 220), une intégrale définie ; nous avons donc, en définitive,

$$s = \int_a^b dx\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

L'opération qui consiste à calculer la longueur d'un arc s'appelle *rectification*. Nous reviendrons sur ce problème au chapitre X et nous en donnerons des exemples.

287. Dérivée et différentielle d'un arc de courbe. — Considérons maintenant, sur la courbe

$$y = f(x),$$

un arc variable s, compté depuis une origine fixe $x = a$, $y = f(a)$ jusqu'à une extrémité mobile x, y. Cet arc sera mesuré par l'intégrale

$$(1) \qquad \int_a^x dx\sqrt{1 + f'(x)^2} = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}.$$

Nous avons établi cette formule en regardant s comme essentiellement positif, nous avons implicitement supposé $x > a$ et le radical pris positivement. Mais, pour la généralité de la formule, il convient de considérer s comme susceptible d'un double signe, suivant le sens dans lequel on compte cet arc.

Nous conviendrons de prendre le radical positivement dans la formule (1), de sorte que s sera positif pour $x > a$ et négatif pour $x < a$. Cela revient à regarder l'arc comme positif dans le sens où x croît et comme négatif dans le sens contraire. Si l'on prenait le radical négativement, la conclusion serait inverse.

Dérivons la formule (1), il vient

$$(2) \qquad s' = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}, \qquad ds = dx\sqrt{1 + y'^2};$$

et, en remarquant que $dy = y'dx$,

$$(3) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Considérons une représentation paramétrique de la courbe, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; soient x' et y' les dérivées de x et de y par rapport à t ; d'où $dx = x'dt$, $dy = y'dt$; il vient

$$(4) \qquad ds = dt\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Nous conviendrons de prendre ce radical positivement, c'est-à-dire de considérer s comme croissant dans le même sens que t.

Enfin on passe facilement des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires par les relations $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, d'où

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta, \qquad dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta.$$

On trouve ainsi, r' désignant la dérivée $dr : d\theta$,

$$(5) \qquad ds = \sqrt{dr^2 + r^2d\theta^2} = d\theta\sqrt{r^2 + r'^2}.$$

$$(6) \qquad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

Nous conviendrons de prendre ce dernier radical positivement, c'est-à-dire de considérer s comme croissant dans le même sens que θ.

288. Théorème. — *Le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde a pour limite l'unité*

En effet, soient Δs la longueur de l'arc, Δx et Δy les différences des coordonnées des extrémités. La corde c a pour me-

sure $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Ces quantités tendant vers zéro, on a donc

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = \lim \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} = \frac{s'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1.$$

289. Inclinaison de tangente. — Soit φ l'angle de la tangente à la courbe $y = f(x)$ avec l'axe de x. Les axes étant rectangulaires, le coefficient angulaire de la tangente est égal à tg φ. Il vient donc

$$\text{tg}\,\varphi = y' = \frac{dy}{dx}. \tag{7}$$

On en déduit (la tangente étant menée dans le sens où x et s croissent simultanément)

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{s'}, \qquad \sin\varphi = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y'}{s'}.$$

Remplaçons y' et s' par $dy : dx$ et $ds : dx$; nous tirons des relations précédentes les formules très employées

$$dx = ds \cos\varphi, \qquad dy = ds \sin\varphi. \tag{8}$$

Ces deux dernières formules supposent seulement la tangente menée dans la direction où s va en croissant.

§ 3. Sens de la concavité (*). Points d'inflexion des courbes planes.

290. Sens de la concavité. — Soient $y = f(x)$ l'équation d'une courbe en axes rectangulaires ou obliques, et M un point de la courbe où la tangente MT n'est pas parallèle à l'axe des y (fig. 7). Si la courbe ne traverse pas sa tangente au point M, elle sera, au deçà et au delà du point M, située du même côté de la tangente MT (au moins dans le voisinage du point M). On dit que la courbe tourne, au point M, sa *concavité* du côté des y positifs ou du

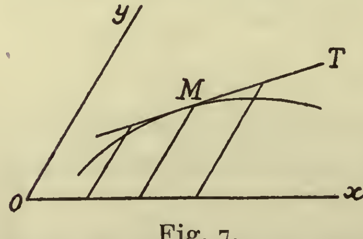


Fig. 7.

(*) Les théorèmes du § 4 du chapitre VIII fournissent une généralisation des résultats ici obtenus.

côté des y négatifs, suivant que la courbe se trouve par rapport à la tangente du côté des y positifs ou du côté des y négatifs.

Supposons les dérivées des deux premiers ordres, $f'(x)$ et $f''(x)$, déterminées et continues dans le voisinage du point M ; nous aurons le théorème suivant :

La courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité du côté des y positifs ou du côté des y négatifs, suivant que la dérivée seconde, $f''(x)$, est positive ou négative au point considéré.

En effet, l'un ou l'autre de ces deux cas se présente suivant que l'ordonnée de la courbe est plus grande que l'ordonnée de la tangente ou plus petite que cette ordonnée dans le voisinage du point M (aussi bien au deçà qu'au delà de ce point). Donnons à x un accroissement positif ou négatif $\Delta x = dx$. L'accroissement de l'ordonnée de la courbe sera Δy, l'accroissement correspondant de l'ordonnée de la tangente sera dy (n° 94). Le sens de la concavité dépend donc du signe de la différence

$$\Delta y - dy\ ;$$

elle sera du côté des y positifs si cette différence est positive, du côté des y négatifs si cette différence est négative (le signe de dx devant rester arbitraire). Mais la formule de Taylor (n° 117) nous donne

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2}(d^2y)_{x+\theta dx} = dy + \frac{1}{2} f''(x+\theta dx)\, dx^2.$$

Si $f''(x)$ n'est pas nul, $f''(x+\theta dx)$ sera du signe de $f''(x)$ à condition que dx soit suffisamment petit : ensuite dx^2 est essentiellement positif. Donc $\Delta y - dy$ sera du même signe que $f''(x)$. La courbe sera située au-dessus ou au-dessous de sa tangente, de part et d'autre du point M, selon que $f''(x)$ sera > 0 ou < 0.

291. Points d'inflexion. — Par définition, ce sont ceux où la courbe $y = f(x)$ traverse sa tangente (*). Si la dérivée $f''(x)$ existe, un tel point ne peut se rencontrer, en vertu du théorème précédent, que si $f''(x) = 0$. Donc *les abcisses des points d'inflexion sont racines de l'équation $f''(x) = 0$.*

(*) Dans la théorie de courbes algébriques, on définit ordinairement les points d'inflexion par la condition $f''(x) = 0$ elle-même. Les deux défitions ne sont pas équivalentes.

Ainsi, pour trouver les points d'inflexion, on cherchera les racines de cette équation. Mais toute racine ne donne pas un point d'inflexion. Pour qu'un point M où la tangente n'est pas parallèle à l'axe des y soit un point d'inflexion, il faut que l'ordonnée de la tangente MT surpasse celle de la courbe d'un côté du point M et que l'inverse ait lieu de l'autre côté. Il faut donc que $\Delta y - dy$ change de signe avec dx.

Les dérivées première et seconde étant supposées continues, on a

$$\Delta y - dy = \frac{dx^2}{2} f''(x + \theta dx).$$

Pour que x soit l'abscisse d'un point d'inflexion, il faut que $f''(x + \theta dx)$ change de signe avec dx. De là, le théorème suivant : *Les points d'inflexion de la courbe $y = f(x)$ sont ceux où $f''(x)$ change de signe,*

Supposons qu'une valeur x annule $f''(x)$ et toutes les dérivées suivantes jusqu'à l'ordre n exclusivement : la formule de Taylor donnera

$$\Delta y - dy = \frac{dx^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta dx).$$

La dérivée $n^{\text{ième}}$ a maintenant un signe indépendant de celui de dx supposé suffisamment petit. Les changements de signes dépendent donc uniquement du facteur dx^n. Celui-ci ne change de signe avec dx que si n est impair. De là, la règle suivante : *Pour qu'une racine de $f''(x)$ donne un point d'inflexion, il faut que la première des dérivées d'ordre supérieur au second qui ne s'annule pas en même temps que $f''(x)$, soit d'ordre impair.*

§ 4. Courbure et développée d'une courbe plane.

292. Courbure. — Considérons une courbe ayant pour équation

$$y = f(x)$$

et supposons que $f(x)$ ait des dérivées continues des deux premiers ordres. Soit MM' un arc de courbe tel que la direction de la tangente varie toujours dans le même sens lorsque le point de contact se déplace de M en M'. Considérons les deux tangentes MT et M'T' menées à ses deux extrémités dans le même sens. On appelle *courbure de l'arc* l'angle des deux tan-

gentes extrêmes ; *courbure moyenne*, le rapport de cet angle à la longueur de l'arc ; *courbure au point* M, la limite vers laquelle tend la courbure moyenne quand le point M' se rapproche indéfiniment du point M.

Désignons par Δs et $\Delta\varphi$ les accroissements de la longueur de l'arc et de l'inclinaison de la tangente quand on passe du point M au point M'. La courbure de l'arc MM' sera $\Delta\varphi$, sa courbure moyenne $\Delta\varphi : \Delta s$ et sa courbure au point M

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Nous remarquerons, pour commencer, le théorème suivant :

Dans un cercle de rayon R, *la courbure est la même en chaque point et égale à* 1 : R.

En effet, l'angle au centre correspondant à l'arc MM' est le même angle $\Delta\varphi$ que celui des tangentes extrêmes ; donc la longueur Δs de l'arc MM' est R $\Delta\varphi$. La courbure moyenne est, par conséquent, égale à 1 : R, quel que soit l'arc MM'. Passant à la limite, on voit que la courbure sera aussi égale à 1 : R en chaque point.

293. Rayon de courbure. — La courbure étant uniforme dans le cercle, il est naturel de comparer les autres courbes à un cercle sous le rapport de la courbure. On appelle *rayon de courbure* d'une courbe au point M, le rayon du cercle qui a même courbure que la courbe en ce point. Comme, dans le cercle, le rayon est l'inverse de la courbure, on a le théorème suivant :

Le rayon de courbure d'une courbe quelconque au point M *est égal à l'inverse de la courbure en ce point.*

Le rayon de courbure se désigne par R, on a donc

$$(1) \qquad R = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Supposons les axes rectangulaires. Les accents désignant des dérivées par rapport à x, on a (n° 289) $\varphi = \text{arc tg } y'$; d'où, en dérivant,

$$(2) \qquad \varphi' = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

D'autre part, on sait (n° 287) que

$$(3) \qquad s' = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Substituant ces valeurs, il vient

$$(4) \qquad R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{s'}{\varphi'} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Cette formule comporte l'extraction d'une racine carrée. On convient de considérer R comme essentiellement positif et l'on choisit en conséquence le signe du radical. Ce signe doit être celui de y'', ce sera donc + ou — selon que la courbe tourne sa concavité du côté des y positifs ou du côté des y négatifs (nº 290).

On remarque qu'en un point d'inflexion où y'' est nul, le rayon de courbure devient infini.

294. Cercle osculateur ou de courbure. — *Le cercle osculateur en un point* M *d'une courbe plane est la limite d'un cercle passant par le point* M *et deux autres points* M′ *et* M″ *de la courbe qui se rapprochent indéfiniment du premier.*

Supposons encore que la courbe ait pour équation en coordonnées rectangulaires

$$y = f(x),$$

$f(x)$ ayant des dérivées continues des deux premiers ordres.

Soient x, x_1 et x_2 les abscisses des points M, M′ et M″, α et β les coordonnées du centre, et R le rayon du cercle qui passe par ces trois points. Posons, y désignant la fonction $f(x)$ et α, β et R des constantes,

$$(5) \qquad F(x) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2.$$

Les équations qui expriment que les trois points M, M′ et M″ sont sur le cercle sont :

$$F(x) = 0, \qquad F(x_1) = 0, \qquad F(x_2) = 0.$$

Mais alors, en vertu du théorème de Rolle, $F'(x)$ a une racine ξ entre x et x_1 et une autre racine ξ' entre x_1 et x_2. Pour la même raison, $F''(x)$ a une racine ξ_1 entre ξ et ξ'. Les éléments α, β et R du cercle passant par M, M′ et M″ vérifient donc les trois équations :

$$F(x) = 0, \qquad F'(\xi) = 0, \qquad F''(\xi_1) = 0.$$

Passons à la limite. Quand x_1 et x_2 tendent vers x, il en est de même de ξ et ξ_1. Les éléments α, β et R du cercle osculateur sont donc déterminés par les trois équations :

$$(6^a) \qquad F(x) = 0, \qquad F'(x) = 0, \qquad F''(x) = 0.$$

En les développant, il vient

$$(6^b)\quad \begin{cases} (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2, \\ (x-\alpha)+(y-\beta)\,y'=0, \\ 1+y'^2+(y-\beta)\,y''=0. \end{cases}$$

Ces équations fournissent des valeurs déterminées pour les éléments du cercle osculateur, pourvu que y'' ne soit pas nul. Les deux dernières déterminent les coordonnées α et β du centre, car on en tire

$$(7)\quad \beta-y=\frac{1+y'^2}{y''},\qquad \alpha-x=-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}.$$

Portant ensuite ces valeurs dans la première équation, il vient

$$(8)\qquad R=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Cette formule est la même que (4). Donc *le rayon du cercle osculateur est égal au rayon de courbure*. C'est pourquoi le cercle osculateur s'appelle aussi *cercle de courbure* et son centre, *centre de courbure*.

Les formules (7) peuvent s'écrire sous une forme plus condensée. Si l'on tient compte de l'équation (2), on a

$$(9)\quad \beta-y=\frac{1}{\varphi'}=\frac{dx}{d\varphi},\qquad \alpha-x=-\frac{y'}{\varphi'}=-\frac{dy}{d\varphi}.$$

Ces formules sont analogues à $R=\dfrac{ds}{d\varphi}$, mais elles ont lieu sans ambiguité de signe.

295. Théorème. — *Le centre de courbure* Z *relatif au point* M *se trouve sur la normale au point* M *à l'intersection de celle-ci avec une normale infiniment voisine.*

En effet, x et y étant les coordonnées de M, la seconde des équations (6), à savoir

$$\frac{1}{2}F'(x)=(x-\alpha)+(y-\beta)y'=0,$$

exprime que le point Z de coordonnées α, β est sur la normale au point M. De même, x_1 étant l'abscisse du point M', l'équation $F'(x_1)=0$ exprime que le point Z est sur la normale au point M'. Mais alors, suivant le théorème de Rolle, $F''(x)$ s'an-

nule en un point ξ intermédiaire entre x et x_1. Les coordonnées α, β de l'intersection des normales en M et M' vérifient donc les deux équations :

$$F'(x) = 0, \qquad F''(\xi) = 0.$$

Faisons tendre M' vers M, ξ tend vers x, et, à la limite, les deux équations précédentes reproduisent les deux dernières équations (6) qui déterminent les coordonnées du centre de courbure.

296. Position du rayon de courbure. — Le rayon de courbure a été considéré jusqu'ici en grandeur seulement. Il est souvent commode de le définir *en grandeur, position* et *sens*. On appelle alors *rayon de courbure* le vecteur MZ mené du point M au centre de courbure correspondant. Le rayon de courbure est donc dirigé suivant la normale au point M du côté où la courbe tourne sa concavité.

297. Relation entre le rayon de courbure et la normale. — La longueur de la normale, considérée au n° 282 a pour expression $\pm y\sqrt{1 + y'^2}$. Il en résulte que l'on a, au signe près,

$$\text{(10)} \qquad \frac{R}{N} = -\frac{1 + y'^2}{yy''}.$$

Précédemment N a été considéré comme positif ainsi que R. Mais nous allons faire en sorte que l'équation (10) subsiste même en signe. Il faut pour cela donner un signe à N, à savoir le signe + si N est du même côté de la courbe que R, et le signe — s'il est du côté opposé.

En effet, le second membre de l'équation (10) a le signe de $-yy''$. Il sera positif si y et y'' sont de signes contraires, alors, la courbe tournant sa concavité vers l'axe OX (n° 290), R et N sont du même côté de la courbe. L'inverse aurait lieu dans le cas contraire.

298. Développée et développante. — Si le point M se déplace sur la courbe, le centre de courbure correspondant Z se déplace en même temps, Le lieu géométrique du centre de courbure se nomme *développée*. Par opposition, la courbe génératrice se nomme *développante*.

On obtient immédiatement une *représentation paramétrique* de la développée. Elle est fournie par les équations (7), qui donnent

$$(11)\qquad \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''},$$

et qui expriment les coordonnées d'un point α, β de la développée en fonction du paramètre x. En éliminant x entre ces deux équations, on met l'équation de la développée sous la forme $F(\alpha, \beta) = 0$. Mais il est souvent tout aussi avantageux d'envisager la développée sous la forme (11).

La développée jouit de propriétés remarquables, que nous allons démontrer.

I. *Le rayon de courbure en* M *touche la développée au centre de courbure* Z *correspondant.*

Considérant y, α et β comme fonctions de x, on a (6^b)

$$(12)\qquad (x-\alpha) + (y-\beta)\,y' = 0.$$

Dérivons totalement cette équation. La somme des termes provenant de la variation des lettres x et y est nulle en vertu de la troisième équation (6) ; il reste donc

$$(13)\qquad -\alpha' - \beta' y' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\beta'}{\alpha'} = -\frac{1}{y'}.$$

Donc la tangente en Z à la développée, qui a pour coefficient angulaire $\beta' : \alpha'$, est parallèle à la normale en M à la développante (donc au rayon de courbure), qui a pour coefficient angulaire $-1 : y'$. Par suite, ces droites, ayant le point Z commun, coïncident.

II. *L'arc de la développée est égal à la différence de longueur des rayons de courbure tangents à ses extrémités.*

Considérant y, α, β et R comme fonctions de x, on a (6^b)

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2.$$

Si l'on dérive totalement cette équation, la somme des termes provenant de la variation des lettres x et y est nulle en vertu de la seconde équation (6) ; il reste donc

$$(x-\alpha)\alpha' + (y-\beta)\beta' = -RR'.$$

D'autre part, en éliminant y' entre (12) et (13), il vient

$$(y-\beta)\alpha' - (x-\alpha)\beta' = 0.$$

Résolvant alors ces deux dernières équations par rapport à α' et β', on trouve, en observant que le déterminant du système est R^2,

$$(14) \qquad \alpha' = -(x-\alpha)\frac{R'}{R}, \qquad \beta' = -(y-\beta)\frac{R'}{R}.$$

Ajoutons ces deux équations élevées au carré et observons que $\alpha'^2 + \beta'^2$ est le carré de la dérivée de l'arc de la développée. Si l'on désigne cet arc par σ, il vient $\sigma'^2 = R'^2$, d'où

$$R' = \pm \sigma'.$$

Le signe à choisir dépend du sens dans lequel on compte l'arc σ. Comptons-le dans le sens où R croît, ce qui suppose que R varie constamment dans le même sens dans l'intervalle considéré des valeurs de x, nous aurons $R' = \sigma'$. Donc R et σ, ayant même dérivée, ne diffèrent que par une constante dans cet intervalle.

Considérons (fig. 8) un arc M_0M de la développante compté depuis un point fixe M_0 d'abscisse x_0 jusqu'à un point variable M d'abscisse x. Supposons que le rayon de courbure varie constamment en croissant quand on se déplace sur la courbe de M_0 vers M. Soit Z_0Z l'arc correspondant de la développée, de sorte que M_0Z_0 et MZ sont les rayons de courbures R_0 et R des points M_0 et M. Désignons par σ l'arc Z_0Z, nous aurons

$$R = \sigma + C.$$

Pour $x = x_0$, cette relation donne $R_0 = C$, nous obtenons donc la relation à démontrer :

$$\sigma = R - R_0.$$

Nous avons supposé dans cette démonstration que la variation de R était toujours de même sens ; le théorème tomberait en défaut si R passait par un maximé ou un minimé.

Remarque. — Les formules (14) mettent en évidence que *toute courbe plane dont le rayon de courbure est constant est un cercle.* En effet, α' et β' s'annulant avec R', α et β sont constants et le centre de courbure est fixe.

299. Description de la développante d'un mouvement continu. Sa détermination analytique. — Les théorèmes précédents fournissent un moyen de décrire la développante d'un mouvement continu

quand on connaît la développée. Concevons un fil parfaitement flexible, inextensible et sans épaisseur, enroulé sur la développée et s'en détachant tangentiellement en Z_0 pour venir aboutir en M_0 où on le coupe (fig. 8). Imaginons qu'on déroule le fil en le détachant tangentiellement de la développée et en le maintenant toujours tendu ; l'extrémité libre du fil décrira la développante. En effet, quand le fil se détachera en Z, il prendra la direction ZM, et comme le brin détaché s'est accru de l'arc Z_0Z, sa longueur sera R. Son extrémité sera donc en M. Comme la longueur Z_0M_0 du brin initial est arbitraire, à une même développée correspondent une infinité de développantes.

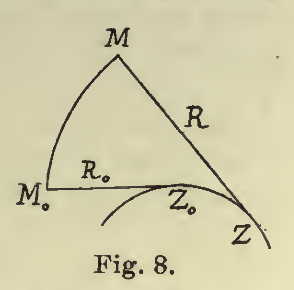


Fig. 8.

Au point de vue analytique, la détermination des développantes quand la développée est donnée, se ramène à la *rectification de l'arc de la développée,* c'est-à-dire à une quadrature.

En effet, supposons que l'équation de la développée soit ramenée à la forme

$$(15) \qquad \beta = \varphi(\alpha).$$

Prenons α comme variable indépendante. Désignons par β' la dérivée de β par rapport à α. L'arc σ compté à partir du point Z_0 (fig. 8) dans le sens où α augmente, se détermine par la formule (n° 287)

$$\sigma = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha\sqrt{1+\beta'^2}.$$

Cette quadrature effectuée, le problème sera résolu. En effet, soit λ l'inclinaison sur l'axe des abscisses de la tangente ZM à la développée ; les coordonnées du point M de la développante sont :

$$x = \alpha + R\cos\lambda, \qquad y = \beta + R\sin\lambda.$$

On a $\operatorname{tg}\lambda = \beta'$. On en déduit, ZM faisant un angle obtus avec l'axe des abscisses (fig. 8),

$$\cos\lambda = -\frac{1}{\sqrt{1+\beta'^2}}, \qquad \sin\lambda = -\frac{\beta'}{\sqrt{1+\beta'^2}}.$$

Comme $R = \sigma + C$, il vient donc

$$(16) \qquad x = \alpha - \frac{\sigma + C}{\sqrt{1+\beta'^2}}, \qquad y = \beta - \frac{\beta'(\sigma + C)}{\sqrt{1+\beta'^2}}.$$

Les seconds membres étant fonctions de α, les équations (16) fournissent une *représentation paramétrique* de la développante.

Si la tangente ZM était dirigée en sens opposé, $\cos\lambda$ et $\sin\lambda$ changeraient de signe, mais les équations précédentes n'en seraient pas altérées, car, R variant alors en sens inverse de σ, on aurait $R = -(\sigma + C)$.

Les équations (16) renferment une constante arbitraire C, ce qui doit être, puisqu'il existe une infinité de développantes.

300. Adaptation des formules au cas d'une représentation paramétrique. — Si x et y sont des fonctions de t ayant pour dérivées x' et y', les dérivées première et seconde de y par rapport à x ont pour expressions (nº 177) :

$$D_x y = \frac{y'}{x'}, \qquad D_x^2 y = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^3}.$$

On doit donc substituer ces valeurs à y' et à y'' dans les formules précédemment trouvées.

L'expression du rayon de courbure se déduit de la formule (4), la transformation donne

$$(17) \qquad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}.$$

Les coordonnés α et β du centre de courbure sont déterminées par les équations suivantes, déduites des équations (7) :

$$(18) \qquad \alpha = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \qquad \beta = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}.$$

Enfin la relation (10) entre R et N devient

$$(19) \qquad \frac{R}{N} = -\frac{x'(x'^2 + y'^2)}{y(x'y'' - x''y')}.$$

301. Applications diverses. — I. Coniques en général. Prenons un axe de la courbe comme axe des x. L'équation d'une conique en coordonnées rectangulaires sera de la forme

$$y^2 = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma.$$

On en tire

$$y' = \frac{\alpha x + \beta}{y}, \qquad y'' = \frac{\alpha y - (\alpha x + \beta)y'}{y^2} = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{y^3}.$$

Substituons ces valeurs dans la relation (10), il vient

$$\frac{R}{N} = -\frac{1+y'^2}{yy''} = -\frac{y^2(1+y'^2)}{\alpha\gamma - \beta^2} = \frac{N^2}{\beta^2 - \alpha\gamma};$$

d'où

$$R = \frac{N^3}{\beta^2 - \alpha\gamma}.$$

Donc *le rayon de courbure d'une conique est proportionnel au cube de la normale limitée à un axe de la courbe.*

Si l'on prend un foyer pour origine et l'axe focal pour axe des x, l'équation prend la forme

$$x^2 + y^2 = (ex + p)^2.$$

En identifiant cette équation avec la précédente, on a

$$\alpha = e^2 - 1, \qquad \beta = ep, \qquad \gamma = p^2,$$

d'où $\beta^2 - \alpha\gamma = p^2$ et

$$R = \frac{N^3}{p^2}.$$

Donc *le rayon de courbure d'une conique est égal au cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre (ordonnée au foyer).*

II. Parabole. Prenons l'axe de symétrie comme axe des y et la directrice comme axe des x. Les points de la parabole sont à égale distance du foyer et de la directrice ; l'équation de cette courbe sera

$$x^2 + (y-p)^2 = y^2,$$

d'où

$$y = \frac{x^2+p^2}{2p}, \qquad y' = \frac{x}{p}, \qquad y'' = \frac{1}{p}.$$

On aura donc

$$\frac{R}{N} = -\frac{1+y'^2}{yy''} = -2.$$

Donc *le rayon de courbure de la parabole est double de la normale limitée à la directrice et il est dirigé en sens contraire,* ce qui fournit une construction facile de ce rayon.

Les coordonnées du centre de courbure sont données par les équations (11), qui se simplifient grâce à la dernière équation ci-dessus. Il vient

$$\alpha = x - 2yy' = -\frac{x^3}{p^2},$$

$$\beta = y + 2y = 3y.$$

Substituant les valeurs de y et de x tirées de ces relations dans l'équation de la parabole, on trouve celle de la développée

$$p\alpha^2 = \left(\frac{2\beta}{3} - p\right)^3.$$

III. Ellipse. Considérons la représentation paramétrique

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t.$$

On en déduit

$$x' = -a \sin t, \quad x'' = -a \cos t, \quad y' = b \cos t, \quad y'' = -b \sin t,$$

d'où $x'y'' - y'x'' = ab$. Il vient donc (n° 300)

$$s' = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$
$$R^2 = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}{(ab)^2}.$$

Les coordonnées du centre de courbure sont :

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= a \cos t - \frac{b \cos t\,(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \\ \beta &= b \sin t - \frac{a \sin t\,(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab} = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t. \end{aligned}\right.$$

Ces formules fournissent une représentation paramétrique de la développée. Si l'on élimine t, l'équation de cette courbe prend la forme

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

IV. Cycloïde. Considérons la représentation paramétrique (n° 283)

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

Nous en tirons

$$x' = y = a(1 - \cos t), \qquad x'' = y' = a \sin t, \qquad y'' = a \cos t,$$
$$x'^2 + y'^2 = 2a^2(1 - \cos t), \qquad x'y'' - x''y' = -a^2(1 - \cos t).$$

Il vient ainsi

$$\frac{R}{N} = -\frac{x'(x'^2 + y'^2)}{y(x'y'' - x''y')} = -\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} = 2.$$

Donc *le rayon de courbure de la cycloïde est double de la normale et il est dirigé dans le même sens.*

Les coordonnées du centre de courbure sont fournies par les équations (18), qui donnent, à cause de la dernière égalité écrite ci-dessus,

$$\alpha = x + 2y' = a(t + \sin t),$$
$$\beta = y - 2x' = -a(1 - \cos t).$$

Mais, en posant $t = \pi + t_1$, ces équations deviennent

$$\alpha = a\pi + a(t_1 - \sin t_1),$$
$$\beta = -2a + a(1 - \cos t_1).$$

Donc la développée est une cycloïde égale à la première mais déplacée de $a\pi$ dans le sens des x positifs et de $2a$ dans celui des y négatifs.

V. CHAINETTE. Cette courbe a pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

L'axe des x est sa *base*, la longueur a son paramètre. On trouve

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \qquad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2},$$

d'où $1 + y'^2 = y^2 : a^2$. On en conclut d'abord

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{y^2}{a}.$$

Donc *le rayon de courbure de la chaînette est proportionnel au carré de l'ordonnée.*

D'autre part, il vient par la formule (10)

$$\frac{R}{N} = -\frac{1 + y'^2}{yy''} = -1.$$

Donc, *dans la chaînette, le rayon de courbure est égal à la normale limitée à la base, mais il est dirigé en sens contraire.*

302. Coordonnées polaires. — Soit φ l'inclinaison de la tangente sur l'axe polaire, α celle de la normale. Comme ces deux angles varient de la même quantité, on a $\varphi' = \alpha'$ et il vient (au signe près), les accents désignant les dérivées par rapport à θ,

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{s'}{\varphi'} = \frac{s'}{\alpha'}.$$

Mais on a (nos 287 et 285)

$$s' = \sqrt{r^2 + r'^2}, \qquad \alpha = \theta - \operatorname{arc\,tg} \frac{r'}{r};$$

d'où, en dérivant par rapport à θ,

$$(20) \qquad \varphi' = \alpha' = 1 - \frac{rr'' - r'^2}{r^2 + r'^2} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}$$

Remplaçant s' et α' par ces valeurs, on trouve

$$(21) \qquad R = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Il faut prendre le signe + ou — selon que $r^2 + 2r'^2 - rr''$, donc selon que α' ou $\frac{d\alpha}{d\theta}$ est > ou < 0, donc selon que R et r sont du même côté ou de part et d'autre de la courbe.

Les coordonnées cartésiennes α et β du centre de courbure s'obtiennent au moyen des relations (9), d'où l'on déduit

$$(22) \qquad \begin{cases} \alpha = x - \dfrac{dy}{d\varphi} = r\cos\theta - \dfrac{(r\sin\theta)'}{\varphi'}, \\ \beta = y + \dfrac{dx}{d\varphi} = r\sin\theta + \dfrac{(r\cos\theta)'}{\varphi'}. \end{cases}$$

On aura soin de ne pas confondre α coordonnée du centre de courbure avec α inclinaison de la normale.

Exemples. I. *Spirale logarithmique* : $r = ae^{m\theta}$. — Dans ce cas, l'angle μ (nº 285) est constant ; α étant l'inclinaison de la normale, on a $\alpha = \theta - \mu$ et on en conclut $\alpha' = 1$. Il vient donc

$$R = s' = \sqrt{r^2 + r'^2} = r\sqrt{1 + m^2}.$$

Donc *le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur.*

D'autre part, si l'on se reporte à la valeur de la normale polaire N' (nº 284), on voit que R = N'. Donc le rayon de courbure est égal à la normale polaire. Le centre de courbure est au point N (fig. 6, p. 300). Si ρ et τ sont les coordonnées du centre de courbure, on aura

$$\rho = N' = mr, \qquad \tau = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

En éliminant r et θ entre ces équations et celle de la courbe, on trouve l'équation de la développée

$$\rho = ma\, e^{m\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Cette développée est une spirale égale à la première, car, en faisant tourner dans le sens rétrograde l'axe polaire autour du pôle d'un angle ω défini par l'équation

$$m\, e^{m\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} = 1,$$

on retrouve l'équation de la première spirale.

II. *Lemniscate de Bernoulli* : $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. — On tire de cette équation

$$rr' = -a^2 \sin 2\theta, \qquad r' : r = -\operatorname{tg} 2\theta.$$

On en conclut d'abord, α étant l'inclinaison de la normale,

$$\alpha = \theta - \operatorname{arc\,tg} \frac{r'}{r} = 3\theta.$$

Donc, *dans la lemniscate, l'inclinaison de la normale est triple de celle du rayon vecteur*. On a donc aussi

$$\varphi' = \alpha' = 3.$$

D'autre part, N' étant la normale polaire, on a

$$s' = N' = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{r}{\cos 2\theta} = \frac{a^2}{r}.$$

De là résulte la valeur de R :

$$R = \frac{s'}{\varphi'} = \frac{N'}{3} = \frac{a^2}{3r}.$$

Donc *le rayon de courbure de la lemniscate varie en raison inverse du rayon vecteur et il est le tiers de la normale polaire*, ce qui permet de le construire facilement.

Soient maintenant α, β les coordonnées du centre de courbure. Faisant $\varphi' = 3$ dans les formules (**22**), il vient, réductions faites,

$$\alpha = \frac{1}{3r}(rr^2 \cos\theta - rr' \sin\theta), \qquad \beta = \frac{1}{3r}(rr^2 \sin\theta - rr' \cos\theta).$$

Enfin, en remplaçant r^2 et rr' par leurs valeurs, à savoir $a^2 \cos 2\theta$ et $-a^2 \sin 2\theta$, on trouve, après quelques simplifications,

$$\alpha = \frac{2a^2}{3r}\cos^3\theta, \qquad \beta = -\frac{2a^2}{3r}\sin^3\theta.$$

L'équation de la développée s'obtient en éliminant r et θ. On a

$$\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{a^{\frac{4}{3}}}{r^{\frac{2}{3}}}, \qquad \alpha^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{r^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}},$$

d'où

$$\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2a}{3}.$$

Exercices.

1. Rayon de courbure de la *cissoïde* (Exercice 2, p. 302).

R. La courbe a pour équation $y^2 = x^3 : (2a - x)$. On en tire

$$R^2 = \frac{a^2 x (8a - 3x)^4}{3^2 (2a - x)^5}.$$

2. Rayon de courbure de la courbe $\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=1$.

$$R=\frac{1}{m-1}\frac{(ab)^m}{(xy)^{m-2}}\left(\frac{x^{2m-2}}{a^{2m}}+\frac{y^{2m-2}}{b^{2m}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

3. Rayon de courbure et développée de l'*astroïde* (hypocycloïde engendrée par un point d'un cercle roulant intérieurement sur un cercle de rayon quadruple a).

R. Les équations de la courbe s'obtiennent en posant $b=h=a:4$ dans celles données à la page 303 (Exercice 5). Il vient

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{a}{4}(3\cos t+\cos 3t)=a\cos^3 t,\\ y&=\frac{a}{4}(3\sin t-\sin 3t)=a\sin^3 t,\end{aligned}\right. \qquad \text{d'où}\quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

On en déduit

$$R=3(axy)^{\frac{1}{3}},\qquad \alpha=x+3(xy^2)^{\frac{1}{3}},\qquad \beta=y+3(x^2y)^{\frac{1}{3}},$$
$$(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}+(\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}.$$

En faisant tourner les axes de 45° autour de l'origine, on voit que la développée est une nouvelle *astroïde*, engendrée par des cercles de rayons doubles des précédents.

4. Rayon de courbure et développée de l'*épicycloïde*.

R. En posant en abrégé $(a+b):b=m$, les équations de cette courbe sont (Exercice 4, p. 302) :

$$x=b(m\cos t-\cos mt),\qquad y=b(m\sin t-\sin mt).$$

Prenant t comme variable indépendante, on trouve

$$s'=2mb\sin\frac{m-1}{2}t,\qquad x'y''-y'x''=2(m+1)(mb)^2\sin^2\frac{m-1}{2}t.$$

On en conclut

$$\varphi'=\frac{m+1}{2},\qquad R=\frac{s'}{\varphi'}=\frac{4mb}{m+1}\sin\frac{m-1}{2}t.$$

Les équations de la développée sont :

$$\alpha=x-\frac{y'}{\varphi'}=\frac{m-1}{m+1}b(m\cos t+\cos mt),$$
$$\beta=y+\frac{x'}{\varphi'}=\frac{m-1}{m+1}b(m\sin t+\sin mt).$$

La développée est une autre épicycloïde. Pour ramener ses équations à la forme normale, comme les équations de l'épicycloïde proposée, il suffit de faire tourner les axes coordonnés d'un angle $\omega=\pi:(m-1)$ et de changer t en $t+\omega$.

5. Rayon de courbure et développée de l'*hypocycloïde*.

R. En posant en abrégé $(a - b) : b = m$, les équations de la courbe sont (Exercice 5, p. 303) :

$$x = b(m \cos t + \cos mt), \qquad y = b(m \sin t - \sin mt).$$

Ces équations s'obtiennent en changeant les signes de b et de m dans celles de l'épicycloïde. La solution est donc comprise dans la précédente. La développée sera une autre hypocycloïde.

6. Soient r le rayon vecteur d'un point d'une courbe, p la perpendiculaire abaissée du pôle sur la tangente. Montrer que le rayon de courbure a pour expression

$$R = \frac{rdr}{dp} = \frac{rr'}{p'}$$

si la concavité est tournée vers le pôle, et ces expressions changées de signe si la concavité est tournée en sens contraire.

R. Ce résultat s'obtient en dérivant la valeur de p (nº 285) et en la comparant à celle de R (nº 302).

7. Rayon de courbure de la courbe : $r^n = a^n \cos n\theta$.

R. C'est une généralisation des résultats obtenus au nº 302 (II) pour la lemniscate. On trouve (α étant l'inclinaison de la normale)

$$\alpha = (n+1)\theta, \qquad R = \frac{N'}{n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{a^n}{r^{n-1}}.$$

8. Rayon de courbure de la podaire d'une courbe donnée.

R. Soient, pour la courbe donnée, r le rayon vecteur, θ l'angle polaire, α l'inclinaison de la normale, s l'arc, R le rayon de courbure. Affectons de l'indice 1 les quantités analogues pour la podaire. On trouve d'abord

$$\alpha_1 = 2\alpha - \theta, \qquad ds_1 = rd\alpha.$$

Il vient alors facilement

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\alpha_1}{ds_1} = \frac{2}{r} - \frac{d\theta}{rd\alpha} = \frac{2}{r} - \frac{R}{r}\frac{d\theta}{ds} = \frac{2}{r} - \frac{Rr_1}{r^3}.$$

9. Rayon de courbure de la développée d'une courbe donnée.

R. Conservons les notations habituelles pour la courbe donnée et soit R_1 le rayon de courbure de la développée. On a

$$R_1 = \frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{dR}{d\varphi} = R\frac{dR}{ds}.$$

Prenant x comme variable indépendante, il vient donc

$$\frac{R_1}{R} = \frac{1}{s'}\left[(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : y''\right]' = 3y' - \frac{(1+y'^2)y'''}{y''^2}.$$

CHAPITRE IX.

Formules fondamentales de la théorie des surfaces et des courbes gauches.

---

§ 1. Tangente à une courbe. Longueur d'un arc. Plan tangent à une surface.

303. Représentation analytique d'une surface. — On peut d'abord considérer une surface comme le lieu des points du plan dont les coordonnées cartésiennes x, y et z sont liées par une équation

$$F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Nous appellerons *point ordinaire* de la surface, tout point où les trois dérivées partielles F'_x, F'_y, F'_z sont continues et l'une au moins différente de zéro. Les autres points sont des *points singuliers*.

Dans le voisinage d'un point ordinaire où F'_z n'est pas nul, l'équation (1) définit une fonction implicite, z, des deux variables indépendantes x et y (nº 170) et, par conséquent, elle peut se ramener, au moins implicitement, à la forme

$$z = f(x, y), \tag{2}$$

la fonction f ayant ses dérivées partielles premières continues.

Si F'_z s'annulait en un point ordinaire, une des deux autres dérivées, F'_x ou F'_y, ne serait pas nulle et la résolution de l'équation (1) pourrait se faire par rapport à x ou par rapport à y.

Nous mettrons souvent l'équation de la surface sous la forme (2). Nous supposerons alors l'existence ou la continuité des dérivées partielles de $f(x, y)$ jusqu'à un certain ordre, qui sera indiqué dans chaque cas particulier. Nos formules s étendront aux équations de la forme (1), en vertu des règles de dérivation des fonctions implicites, à condition de nous borner aux points ordinaires de la surface et de supposer l'existence ou la conti-

nuité des dérivées partielles de F jusqu'à l'ordre requis pour celles de f.

On peut aussi définir une surface au moyen d'une *représentation paramétrique.* On exprime alors les coordonnées x, y, z de ses points en fonctions de deux paramètres indépendants u et v. La surface est alors représentée au moyen de trois équations :

$$(3) \qquad x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v).$$

Quand nous emploierons cette représentation, nous supposerons les trois fonctions f continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à un certain ordre à indiquer.

Nous appellerons *points ordinaires* de la surface ceux où l'un au moins des trois déterminants :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Dans le voisinage d'un point ordinaire ainsi défini, on peut encore considérer une des trois coordonnées x, y, z comme fonction des deux autres. En effet, si le premier de ces déterminants est différent de zéro, les deux premières équations (3) définissent u et v en fonction de x, y et, en portant ces valeurs dans la troisième équation, on obtient z en fonction de x et y, c'est-à-dire que l'équation de la surface se met sous la forme (2).

Donc, dans les démonstrations, on pourra supposer à son gré que la surface soit définie par une équation de la forme (2) ou par un système de la forme (3). Les démonstrations seront générales à condition de se borner aux points ordinaires de la surface.

304. Représentation analytique d'une courbe de l'espace. — En premier lieu, on peut définir une courbe de l'espace comme l'intersection de deux surfaces différentes, ou comme le lieu des points dont les coordonnées vérifient deux équations :

$$(4) \qquad F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0.$$

Les *points ordinaires* de la courbe sont ceux où les deux fonctions F_1 et F_2 sont continues ainsi que leurs dérivées par-

tielles premières et où l'un au moins des trois déterminants :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

Si le premier de ces déterminants n'est pas nul, les équations (4) définissent deux fonctions implicites y et z de x et, par conséquent, elles peuvent, au moins implicitement, se ramener à la forme

$$(5) \qquad y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x),$$

ces deux fonctions ayant des dérivées premières continues.

Les résultats que nous établirons en raisonnant sur les équations de la forme (5) s'étendent aux équations de la forme (4), à condition de nous limiter aux points ordinaires de la courbe et d'introduire les conditions de continuité des dérivées jusqu'au même ordre.

On peut, en second lieu, considérer une courbe comme le lieu des positions successives d'un point mobile, ce qui conduit à exprimer x, y, z en fonction d'une variable indépendante t. On obtient ainsi une *représentation paramétrique* de la courbe au moyen de trois équations :

$$(6) \qquad x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t).$$

On appelle alors *points ordinaires* de la courbe, ceux où les trois fonctions φ sont continues ainsi que leurs dérivées et où l'une au moins des trois dérivées φ_1', φ_2' ou φ_3' est différente de zéro.

Dans le voisinage d'un point ordinaire, le système (6) peut aussi se transformer dans le système analogue à (5). En effet, si $\varphi_1'(t)$ n'est pas nul, la première équation (6) définit t en fonction de x (n° 170), et en portant cette valeur dans les deux équations suivantes, on obtient y et z en fonction de x.

Donc, dans les démonstrations, on peut choisir le mode de représentation que l'on veut. Les conclusions seront générales à condition de se borner aux points ordinaires de la courbe.

C'est le mode de représentation paramétrique qui est le plus employé, parce qu'il a l'avantage de rendre les formules plus symétriques. Les formules ainsi établies renferment comme cas

particulier celles relatives au premier mode de représentation, car les équations (6) se réduisent à la forme (5) si $t = x$.

Pour les démonstrations, nous mettrons le plus souvent les équations de la courbe sous la forme (6) et nous indiquerons jusqu'à quel ordre nous supposerons l'existence ou la continuité des dérivées.

Lorsque tous les points d'une courbe sont dans un même plan, la courbe est *plane*, elle est *gauche* dans le cas contraire.

305. Tangente et plan normal à une courbe. — Supposons que la courbe, rapportée à des axes rectangulaires ou obliques, ait pour représentation paramétrique

$$(7) \qquad x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t).$$

La tangente en un point M de coordonnées x, y, z est la limite d'une sécante passant par ce point et par un autre point M' qui se rapproche indéfiniment du premier. Soient Δt l'accroissement qu'il faut donner au paramètre pour passer de M à M' ; Δx, Δy, Δz les accroissements correspondants des coordonnées. Les équations de la sécante MM' peuvent s'écrire (ξ, η, ζ désignant les coordonnées courantes)

$$(8) \qquad \frac{\xi - x}{\Delta x} = \frac{\eta - y}{\Delta y} = \frac{\zeta - z}{\Delta z}.$$

Divisons les dénominateurs par Δt et faisons tendre Δt vers 0. Les quotients $\Delta x : \Delta t$, $\Delta y : \Delta t$, $\Delta z : \Delta t$ tendent vers les dérivées x', y', z', supposées existantes, de x, y, z par rapport à t. On trouve ainsi les équations de la tangente au point M, à savoir

$$(9) \qquad \frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}.$$

Ces équations supposent toutefois que x', y', z' ne s'annulent pas simultanément au point M, et c'est ce qui a lieu en un point ordinaire de la courbe.

Multiplions par dt les trois dénominateurs des équations (9) ; les équations de la tangente prennent la forme suivante, indépendante du mode de représentation adopté pour la courbe :

$$(10) \qquad \frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

Le *plan normal* en un point d'une courbe est le plan mené par

ce point perpendiculairement à la tangente. Nous supposerons les axes rectangulaires. L'équation du plan normal se déduit des équations (9) ou (10), car les coefficients de direction de la tangente sont les coefficients de l'équation du plan normal ; cette équation sera de l'une des deux formes :

$$(11) \qquad (\xi - x)\,x' + (\eta - y)\,y' + (\zeta - z)\,z' = 0,$$

$$(12) \qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

306. Longueur d'un arc de courbe. Différentielle de l'arc. — La longueur d'un arc de courbe AB se définit comme dans le cas des courbes planes (nº 286). C'est la limite, quand elle existe, du périmètre d'un polygone inscrit dont les sommets se suivent dans un sens déterminé, lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment et que chacun des côtés tend vers zéro. Nous allons démontrer l'existence de cette limite, en supposant que tous les points de l'arc AB soient des points ordinaires. Nous pouvons donc admettre que les équations de la courbe soient de la forme

$$y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x),$$

les deux fonctions φ et ψ ayant des dérivées continues. Les axes seront supposés rectangulaires.

Soient a et b les abscisses des extrémités de l'arc AB ($a < b$). Marquons sur cet arc $n + 1$ points (y compris les extrémités). Soient $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ les abscisses de ces points numérotées par ordre de grandeur, de sorte que $x_1 = a$ et $x_{n+1} = b$ seront celles des extrémités. Désignons par y_i et z_i les valeurs de y et de z pour $x = x_i$. Inscrivons dans l'arc AB un polygone ayant ces $n + 1$ points pour sommets. Le côté c_i qui joint les points d'abscisses x_i et x_{i+1} a pour longueur

$$c_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}.$$

Mais la formule des accroissements finis nous donne, X_i et ξ_i étant compris entre x_i et x_{i+1},

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i)\varphi'(X_i), \qquad z_{i+1} - z_i = (x_{i+1} - x_i)\,\psi'(\xi_i).$$

Désignons par M_i et m_i les bornes supérieure et inférieure de la fonction $\varphi'(x)^2$ dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) et par θ une quantité de valeur absolue moindre que 1 ; nous aurons

$$\varphi'(X_i)^2 = \varphi(\xi_i)^2 + \theta(M_i - m_i).$$

Donc, en posant, en abrégé,

$$\delta_i' = (x_{i+1} - x_i),$$

nous pouvons mettre c_i sous la forme

$$c_i = \delta_i \sqrt{1 + \varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\xi_i)^2 + \theta(M_i - m_i)}.$$

Mais la racine carrée d'une quantité supérieure à l'unité varie moins rapidement que cette quantité (*) ; nous avons donc

$$c_i = \delta_i \sqrt{1 + \varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\xi_i)^2},$$

avec une erreur moindre en valeur absolue que $(M_i - m_i)\,\delta_i$; et, en désignant par P le périmètre du polygone inscrit,

$$P = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \sqrt{1 + \varphi'(\xi_i)^2 + \psi'(\xi_i)^2},$$

avec une erreur moindre que $\Sigma(M_i - m_i)\delta_i$.

Faisons tendre tous les côtés du polygone et, par suite, tous les δ_i vers zéro : il vient par définition de l'intégrale (n° 220)

$$\lim P = \int_a^b dx\sqrt{1 + \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2},$$

sans aucune erreur, car, comme la fonction continue $\varphi'(x)^2$ est intégrable, les deux sommes $\Sigma M_i\delta_i$ et $\Sigma m_i\delta_i$ tendent vers la même limite et $\Sigma(M_i - m_i)\delta_i$ tend vers zéro.

L'arc variable AM, compris entre un point fixe A d'abscisse a et un point variable M d'abscisse x, est une fonction s de x. Cette fonction est continue et admet une dérivée. On a, en effet,

$$(13) \qquad s = \int_a^x dx\sqrt{1 + \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2}.$$

$$(14) \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2}.$$

La *différentielle de l'arc* sera donc

$$(15) \quad ds = dx\sqrt{1 + \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Dans les calculs précédents, tous les radicaux ont été pris positivement, ce qui revient à considérer l'arc s comme crois-

---

(*) En effet, si a est > 1, on a, quel que soit x,

$$|\sqrt{a+x} - \sqrt{a}| = |x : (\sqrt{a+x} + \sqrt{a})| < |x|$$

sant dans le même sens que x. Dans l'hypothèse inverse, les radicaux seraient pris négativement. Nous ferons (sauf indication contraire) la première hypothèse, chaque fois que x sera pris comme variable indépendante.

307. Théorème — *Le rapport d'un arc infiniment petit à la corde qui le sous-tend a pour limite l'unité.*

En effet, soient Δs la longueur de l'arc, Δx, Δy et Δz les différences des coordonnées des extrémités. La corde correspondante c a pour mesure $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Lorsque ces quantités tendent vers zéro, on a

$$\lim \frac{\Delta s}{c} = \lim \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta z}\right)^2}} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = 1,$$

en vertu de la formule (15). Le signe du radical ne donne pas lieu à discussion, car il ne s'agit dans le théorème que de longueurs absolues.

308. Dérivée et différentielle de l'arc dans le cas d'une représentation paramétrique. — La formule (15) peut se mettre sous la forme

$$(16) \qquad ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Cette formule ne contient plus que les différentielles des coordonnées et elle ne dépend plus en rien du mode de représentation choisi pour la courbe. Elle est donc générale et elle s'applique au cas d'une représentation paramétrique. Les coordonnées x, y, z sont alors des fonctions de t ayant, par hypothèse, des dérivées continues x', y', z'. Remplaçons dx, dy, dz par $x'dt$, $y'dt$, $z'dt$. La formule (16) devient

$$(17) \qquad ds = \pm dt\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

et la dérivée s' par rapport à t sera

$$(18) \qquad s' = \pm \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Le signe à donner aux radicaux dépend du sens dans lequel on compte l'arc. Sauf indication contraire, nous leur donnerons le signe $+$, ce qui revient à compter l'arc dans le sens où t varie en croissant.

309. Cosinus directeurs de la tangente. — Nous désignerons par α, β, γ les cosinus des angles que fait la tangente avec les axes coordonnés, ou les *cosinus directeurs* de cette droite. Pour les définir sans ambiguité, considérons la tangente menée au point $M(x, y, z)$ dans le sens des arcs croissants. Les cosinus directeurs de la droite MM' qui joint le point M au point M' de coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sont, c désignant la longueur absolue de la droite MM',

$$\frac{\Delta x}{c}, \quad \frac{\Delta y}{c}, \quad \frac{\Delta z}{c}.$$

Soit Δs l'arc MM'; Δs sera positif si MM' est mené dans le sens des arcs croissants. Or les expressions précédentes peuvent s'écrire

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}\frac{\Delta s}{c}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s}\frac{\Delta s}{c}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s}\frac{\Delta s}{c}.$$

Quand M' tend vers M, Δs et c étant positifs, $\Delta s : c$ a pour limite $+ 1$ (n° 308). Les cosinus directeurs de la direction MM' à la limite sont donc

$$(19) \qquad \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Tels sont, en grandeur et en signe, les cosinus directeurs de la tangente menée dans le sens des arcs croissants.

Dans le cas d'une représentation paramétrique, x, y, z sont des fonctions de t; on peut, dans les formules précédentes, remplacer les différentielles par les dérivées et s' par sa valeur (18); il vient ainsi

$$(20) \qquad \frac{\alpha}{x'} = \frac{\beta}{y'} = \frac{\gamma}{z'} = \frac{1}{s'} = \frac{1}{\pm\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Si le radical est pris positivement, s et t croissent dans le même sens et la tangente est menée dans le sens où t varie en croissant.

Remarque. — Les formules précédentes prouvent que *toute courbe dont les tangentes sont parallèles à une direction fixe, se réduit à une droite.* En effet, soient, a, b, c les coefficients de la direction fixe. On a

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c}.$$

Donc $x : a$. $y : b$ et $z : c$, ayant même dérivée, ne diffèrent que par des constantes et l'on a

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} + C, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} + C_1.$$

Ce sont les équations d'une droite.

310. Plan tangent à une surface. — Considérons d'abord une surface définie par l'équation

$$z = f(x, y). \tag{21}$$

Théorème. — *En tout point* M *de la surface où $f(x, y)$ est différentiable, le lieu géométrique des tangentes menées au point* M *à toutes les courbes tracées sur la surface et passant par ce point, est un plan auquel on donne le nom de plan tangent à la surface.*

Toute courbe tracée sur la surface et douée d'une tangente, se projette sur le plan xy suivant une certaine courbe plane douée d'une tangente. Considérons une représentation paramétrique de cette courbe plane

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t). \tag{22}$$

L'ensemble des équations (21) et (22) fournit une représentation paramétrique correspondante de la courbe tracée sur la surface, car, en remplaçant x et y par $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, l'équation (21) donne aussi z en fonction de t.

Les équations de la tangente au point $M(x, y, z)$ de cette courbe sont (nº 306)

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}. \tag{23}$$

Mais, en dérivant totalement l'équation (21) par rapport à t, en désignant par p, q les dérivées partielles de $f(x, y)$ par rapport à x, y et en observant que les dérivées x', y' par rapport à t sont existantes par hypothèse, on a (nº 150)

$$z' = px' + qy'.$$

En éliminant x', y', z' entre cette équation et les précédentes, on trouve la relation

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y), \tag{24}$$

qui est vérifiée par les coordonnées ξ, η, ζ d'un point d'une tangente quelconque passant par M. Cette équation, étant du premier degré, est celle d'un plan. Ce plan est le plan tangent à la surface au point M.

Considérons maintenant une surface définie par l'équation

$$(25) \qquad F(x, y, z) = 0.$$

Elle admet un plan tangent en tout point ordinaire. En effet, une des dérivées, F'_z par exemple, n'est pas nulle. Alors l'équation (25) admet une solution z de la forme (21) dont les dérivées partielles sont

$$p = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad q = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Le théorème précédent s'applique et, par la substitution de ces valeurs de p, q, l'équation (24) devient

$$(26) \qquad (\xi - x) F'_x + (\eta - y) F'_y + (\zeta - z) F'_z = 0.$$

Donc *l'équation du plan tangent en un point ordinaire s'obtient en différentiant totalement l'équation de la surface et en remplaçant dx, dy et dz par $\xi - x$, $\eta - y$ et $\zeta - z$.*

Considérons enfin une surface définie par une *représentation paramétrique*

$$(27) \qquad x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v).$$

Il suffit de faire u et v fonctions d'un paramètre unique t pour que les équations précédentes soient celles d'une courbe tracée sur la surface. Les équations de la tangente à cette courbe au point M sont, les accents désignant sans indices des dérivées par rapport à t,

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}.$$

Mais, x, y, z étant supposés différentiables en u, v, les coefficients de directions x', y' et z' ont maintenant pour expressions :

$$x' = x'_u u' + x'_v v', \qquad y' = y'_u u' + y'_v v', \qquad z' = z'_u u' + z'_v v' ;$$

et ils sont liés par une relation générale, qui résulte de l'élimination de u' et v', à savoir

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

L'élimination de x', y', z' entre les équations de la tangente et cette relation fournit une équation vérifiée par les coordonnées des points d'une tangente quelconque passant par M. C'est l'équation du plan tangent. Pour l'obtenir, il suffit de remplacer x', y', z' par $\xi - x$, $\eta - y$ et $\zeta - z$ dans la relation précédente, ce qui donne

$$\text{(28)} \qquad \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs, en un point ordinaire, cette équation ne peut pas se réduire à une identité, car l'un au moins des trois mineurs relatifs à $\xi - x$, $\eta - y$ et $\zeta - z$ n'est pas nul (n° 303).

311. Normale à une surface (axes rectangulaires). — La normale en un point M (x, y, z) d'une surface est la perpendiculaire élevée au plan tangent en ce point. Les équations de la normale se déduisent immédiatement de celle de ce plan. En effet, les axes étant rectangulaires, les coefficients de directions de la normale sont les coefficients de l'équation du plan tangent. La normale sera représentée par l'un des trois systèmes d'équations, correspondant respectivement à (24), (26) et (28) :

$$\text{(29)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\xi - x}{p} = \dfrac{\eta - y}{q} = \dfrac{\zeta - z}{-1}. \\[2ex] \dfrac{\xi - x}{F'_x} = \dfrac{\eta - y}{F'_y} = \dfrac{\zeta - z}{F'_z}. \\[2ex] \dfrac{\xi - x}{y'_u z'_v - z'_u y'_v} = \dfrac{\eta - y}{z'_u x'_v - x'_u z'_v} = \dfrac{\zeta - z}{x'_u y'_v - y'_u x'_v}. \end{array} \right.$$

Les cosinus directeurs X, Y, Z de la normale sont proportionnels aux dénominateurs qui figurent dans chacun des trois systèmes d'équations. Ils se déterminent donc par l'un des trois systèmes correspondants :

$$\text{(30)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{X}{p} = \dfrac{Y}{q} = \dfrac{Z}{-1} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \\[2ex] \dfrac{X}{F'_x} = \dfrac{Y}{F'_y} = \dfrac{Z}{F'_z} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}. \\[2ex] \dfrac{X}{y'_u z'_v - z'_u y'_v} = \dfrac{Y}{z'_u x'_v - x'_u z'_v} = \dfrac{Z}{x'_u y'_v - y'_u z'_v}. \end{array} \right.$$

Le double signe du radical correspond aux deux sens opposés dans lesquels on peut mener la normale.

§ 2. Plan osculateur. Courbure et torsion des courbes gauches.

312. Représentation de la courbe. — Dans tout le paragraphe actuel nous considérerons la représentation paramétrique suivante d'une courbe gauche :

$$(1) \qquad x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t).$$

Nous admettrons la *continuité* des dérivées premières et secondes de x, y, z par rapport à t, en outre (mais seulement à partir du n° 320) l'*existence* des dérivées troisièmes. Les points seront supposés *ordinaires*, donc l'une au moins des dérivées x', y', z' différente de 0.

Nous supposerons les axes coordonnés rectangulaires (*).

313. Plan osculateur. — *Le plan osculateur en un point* M *d'une courbe gauche est la limite d'un plan passant par le point* M *et deux autres points* M' *et* M'' *de la courbe qui se rapprochent indéfiniment du premier.* — Cherchons-en l'équation.

L'équation d'un plan quelconque est de la forme

$$(2) \qquad A\xi + B\eta + C\zeta + P = 0.$$

Posons A, B, C et P désignant des constantes et x, y, z les fonctions (1) de t écrites ci-dessus,

$$(3) \qquad F(t) = Ax + By + Cz + P.$$

Soient t, t_1 et t_2 les valeurs du paramètre qui correspondent aux trois points M, M' et M'' ; les équations qui expriment que le plan (2) passe par ces trois points sont :

$$F(t) = 0, \qquad F(t_1) = 0, \qquad F(t_2) = 0.$$

Mais alors, en vertu du théorème de Rolle, F' a une racine τ comprise entre t et t_1 et une autre racine τ' comprise entre t_1

(*) On observera cependant que les n[os] 313, 314 et 315 subsistent sans changement en axes obliques.

et t_2. Pour la même raison, F'' a une racine τ_1 comprise entre τ et τ'. On a donc les trois équations :

$$F(t) = 0, \qquad F'(\tau) = 0, \qquad F''(\tau_1) = 0.$$

Faisons tendre M' et M'' vers M, c'est-à-dire t_1 et t_2 vers t ; τ et τ_1 tendent aussi vers t et, à la limite, les dérivées étant continues, les trois équations précédentes deviennent :

$$(4^A) \qquad F(t) = 0, \qquad F'(t) = 0, \qquad F''(t) = 0.$$

Ce sont les trois équations qui déterminent les coefficients A, B, C et P de l'équation du plan osculateur (ou, plus exactement les rapports de ces coefficients). En les développant, il vient :

$$(4^B) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + P = 0, \\ Ax' + By' + Cz' = 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' = 0. \end{cases}$$

On élimine P en soustrayant de (2) la première des équations (4) ; on met ainsi l'équation du plan osculateur sous la forme

$$(5) \qquad A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$

où A, B, C doivent satisfaire aux deux dernières équations (4^B). Entre celles-ci et (5), on peut éliminer A, B, C et l'on obtient l'équation du plan osculateur sous forme de déterminant :

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients A, B, C ne sont déterminés jusqu'ici qu'à un facteur près. Mais nous conviendrons de désigner par A, B et C les coefficients qui figurent dans l'équation (6), de sorte que nous poserons

$$(7) \quad A = y'z'' - z'y'', \quad B = z'x'' - x'z'', \quad C = x'y'' - y'x''.$$

Les équations (5) et (6) ne représentent le plan osculateur que si l'une au moins des quantités A, B et C est différente de zéro. Si ces trois quantités s'annulaient simultanément en un point, les deux équations se réduiraient à des identités et l'équation du plan osculateur devrait être modifiée. Nous laisserons de côté ces points exceptionnels pour le moment. Il doit donc être

bien entendu à partir d'ici qu'une au moins des trois quantités A, B, C est supposée différente de 0.

Remarque. — Il est impossible que A, B, C s'annulent à la fois tout le long d'une courbe. En effet, on aurait, le long de cette courbe,

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,x' = \mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,y' = \mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,z'.$$

Donc Log x', Log y', Log z', ayant même dérivée, ne différeraient que par des constantes et les quantités x', y', z' seraient dans un rapport constant. On pourrait donc poser

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c};$$

et, la direction de la tangente étant constante, la courbe se réduirait à une droite (nº 309).

314. Théorème. — *Le plan mené par la tangente au point* M *parallèlement à la tangente au point infiniment voisin* M', *a pour limite le plan osculateur.*

Soit (2) l'équation de ce plan. La condition de passer par M donne $F(t) = 0$; la condition d'être parallèle à la tangente au même point M, tangente dont les cosinus directeurs sont proportionnels à x', y', z', donne $Ax' + By' + Cz' = 0$ ou $F'(t) = 0$; de même, la condition d'être parallèle à la tangente au point M' donne $F'(t_1) = 0$. Mais alors, en vertu du théorème de Rolle, F'' a une racine τ comprise entre t et t_1. Les coefficients du plan considéré vérifient donc les trois équations :

$$F(t) = 0, \qquad F'(t) = 0, \qquad F''(\tau) = 0.$$

Quand M' tend vers M, t_1 tend vers t et τ également. Donc les coefficients du plan-limite vérifient les trois équations qui déterminent ceux du plan osculateur :

$$F(t) = 0, \qquad F'(t) = 0, \qquad F''(t) = 0.$$

315. Cercle osculateur. — *Le cercle osculateur en un point* M *d'une courbe gauche est la limite d'un cercle passant par ce point et par deux autres points* M' *et* M'' *de la courbe qui se rapprochent indéfiniment du premier.*

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre et R le rayon du cercle passant par les trois points M, M' et M''. Soient t, t_1, t_2 les valeurs du paramètre correspondant à ces trois points. Considérons x, y, z comme les fonctions (1) de t et posons

$$F(t) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - R^2.$$

Les quantités x_1, y_1, z_1 et R vérifieront les trois équations :

$$F(t) = 0, \qquad F(t_1) = 0, \qquad F(t_2) = 0,$$

qui expriment que le centre (x_1, y_1, z_1) est à la distance R des trois points M, M' et M''. On en conclut, comme dans le cas d'une courbe plane (n° 294), que les éléments x_1, y_1, z_1 et R du cercle osculateur vérifient les trois équations :

$$F(t) = 0, \qquad F'(t) = 0, \qquad F''(t) = 0.$$

D'autre part, le cercle osculateur étant dans le plan osculateur, qui est la limite du plan MM'M'', les coordonnées du centre verifient l'équation (5) de ce plan. On a donc

$$(8) \qquad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

l'une des trois quantités A, B, C étant supposée différente de 0 (n° 313).

Ajoutons à celles-ci les équations $F'(t) = 0$ et $F''(t) = 0$, qui développées deviennent

$$(9) \qquad \begin{cases} x'(x - x_1) + y'(y - y_1) + z'(z - z_1) = 0. \\ x''(x - x_1) + y''(y - y_1) + z''(z - z_1) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2). \end{cases}$$

Nous formons un système de trois équations, résoluble par rapport à $(x - x_1)$, $(y - y_1)$ et $(z - z_1)$, et d'où l'on tire, en observant que le déterminant du système est $A^2 + B^2 + C^2$, qui est différent de 0 par hypothèse (n° 313),

$$(10) \qquad \frac{x_1 - x}{Bz' - Cy'} = \frac{y_1 - y}{Cx' - Az'} = \frac{z_1 - z}{Ay' - Bx'} = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Ces équations déterminent les coordonnées x_1, y_1 et z_1 du centre du cercle osculateur.

Le rayon R se détermine ensuite au moyen de l'équation $F(t) = 0$, qui donne

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Remplaçons dans le second membre les parenthèses par leurs valeurs tirées du système précédent, et ayons égard à l'identité

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (Bz' - Cy')^2 + (Cx' - Az')^2 + (Ay' - Bx')^2 = \\ (A^2 + B^2 + C^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (Ax' + By' + Cz')^2 ; \end{array} \right.$$

il viendra, puisque ce dernier carré est nul (4^B),

$$(12) \quad R^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}{A^2 + B^2 + C^2}, \qquad R = \frac{s'^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

On attribue à R une valeur positive, donc au radical le signe de s'.

Remarque. — *Le centre du cercle osculateur se trouve,* comme on l'a vu plus haut, *dans le plan osculateur. Il se trouve aussi dans le plan normal.* En effet, la première des équations (9), $F'(t) = 0$, exprime que les coordonnées x_1, y_1, z_1 vérifient l'équation du plan normal.

316. Transformation des formules précédentes. — Pour un instant, prenons s comme variable indépendante : nous aurons $s'^2 = 1$ et $Ds'^2 = 0$, c'est-à-dire

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

Ces formules permettent de simplifer celles du n° précédent. Nous avons, en effet, eu égard aux valeurs (7) de B et C,

$$\begin{aligned} Bz' - Cy' &= (y'^2 + z'^2)x'' - (y'y'' + z'z'')x' \\ &= (y'^2 + z'^2)x'' - (-x'x'')x' = x''. \end{aligned}$$

De même,

$$Cx' - Az' = y'', \qquad Ay' - Bx' = z'',$$

et l'identité (11) se réduit à

$$A^2 + B^2 + C^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

Comme, dans notre hypothèse sur s, les dérivées x'', y'', z'' sont les dérivées premières de α, β, γ (cosinus directeurs de la tangente), les formnles précédentes deviennent

$$Bz' - Cy' = \frac{d\alpha}{ds}, \qquad Cx' - Az' = \frac{d\beta}{ds}, \qquad Ay' - Bx' = \frac{d\gamma}{ds},$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2.$$

Portons ces valeurs dans les formules (10) et (12), nous trouvons

$$(13) \quad \frac{x_1 - x}{\frac{d\alpha}{ds}} = \frac{y_1 - y}{\frac{d\beta}{ds}} = \frac{z_1 - z}{\frac{d\gamma}{ds}} = R^2 = \frac{ds^2}{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}.$$

Ces formules (13) ne contiennent plus que des différentielles premières d'éléments définis sur la courbe, elles sont donc indépendantes du choix de la variable indépendante et générales comme (10) et (12).

317. Courbure. Rayon de courbure. — La courbure se définit dans les courbes gauches comme dans les courbes planes. Considérons sur la courbe deux points M et M′ et menons les tangentes MT et M′T′ en ces deux points dans le sens des arcs croissants. Formons le rapport de l'angle de ces deux tangentes à la longueur de l'arc ; la limite de ce rapport quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, s'appelle la *courbure de la courbe au point* M.

Le *rayon de courbure au point* M est le rayon d'un cercle ayant même courbure que la courbe en ce point ; il est donc égal à l'inverse de la courbure.

Pour déterminer ce rayon R, désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente MT au point M (x, y, z), par $\alpha+\Delta\alpha$, $\beta+\Delta\beta$, $\gamma+\Delta\gamma$ ceux de la tangente M′T′ au point M′, par φ l'angle des deux tangeutes MT et M′T′ ; on a

$$\cos\varphi = \alpha(\alpha+\Delta\alpha)+\beta(\beta+\Delta\beta)+\gamma(\gamma+\Delta\gamma).$$

Mais les cosinus directeurs de MT et M′T′ satisfont aux deux relations :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \qquad (\alpha+\Delta\alpha)^2+(\beta+\Delta\beta)^2+(\gamma+\Delta\gamma)^2=1.$$

En les ajoutant, il vient

$$2[\alpha(\alpha+\Delta\alpha)+\beta(\beta+\Delta\beta)+\gamma(\gamma+\Delta\gamma)] = 2-(\Delta\alpha^2+\Delta\beta^2+\Delta\gamma^2)\,;$$

d'où, puisque le premier membre est $2\cos\varphi$,

$$\Delta\alpha^2+\Delta\beta^2+\Delta\gamma^2 = 2(1-\cos\varphi) = \left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Comme le rapport de $2\sin\frac{\varphi}{2}$ à φ a pour limite l'unité quand φ tend vers zéro, on peut, sans en changer la limite, substituer ces deux quantités l'une à l'autre dans un rapport d'infiniment petits. Soit Δs la longueur de l'arc infiniment petit MM′ ; la courbure $1 : R$ au point M est égale à la limite de $\varphi : \Delta s$; il vient donc

$$\frac{1}{R^2} = \lim\left(\frac{\varphi}{\Delta s}\right)^2 = \lim\left(\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\Delta s}\right)^2 = \lim\frac{\Delta\alpha^2+\Delta\beta^2+\Delta\gamma^2}{\Delta s^2},$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}{ds^2} = \frac{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}{s'^2}.$$

Donc, en vertu de la formule (13), *le rayon de courbure est égal au rayon du cercle osculateur.*

On considère R comme essentiellement positif, son expression en fonction des dérivées des coordonnées sera donnée par la formule (12) :

$$R = \frac{s'^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

où le radical reçoit le signe de s'.

Le cercle osculateur, ayant pour rayon le rayon de courbure, reçoit, à cause de cela, le nom de *cercle de courbure* et son centre celui de *centre de courbure.*

318. Position du rayon de courbure. Normale principale. — On considère généralement le rayon de courbure comme déterminé de situation, de direction et de sens. C'est le vecteur mené du point M au centre de courbure correspondant, dont les coordonnées x_1, y_1 et z_1 ont été déterminées précédemment (n° 316). Le rayon de courbure est normal à la courbe et situé dans le plan osculateur, car le centre de courbure se trouve dans le plan normal et dans le plan osculateur (n° 315). On donne le nom de *normale principale* à celle qui a cette direction et ce sens. Ses cosinus directeurs λ, μ et ν se déduisent, sans ambiguité de signe, des équations (13) en y faisant les substitutions :

$$x_1 - x = R\lambda, \qquad y_1 - y = R\mu, \qquad z_1 - z = R\nu.$$

Il vient ainsi

$$(14) \qquad \frac{\lambda}{d\alpha} = \frac{\mu}{d\beta} = \frac{\nu}{d\gamma} = \frac{R}{ds},$$

ou encore, en divisant tous les dénominateurs par dt,

$$(15) \qquad \frac{\lambda}{\alpha'} = \frac{\mu}{\beta'} = \frac{\nu}{\gamma'} = \frac{R}{s'}.$$

Comme α', β' et γ' changent de signe en même temps que s', ces formules mettent en évidence que λ, μ, ν ne dépendent pas du sens dans lequel on compte les arcs.

319. Directions principales. Sens de la binormale. — Par le point M d'une courbe, menons *la tangente* dans le sens des arcs croissants, *la normale principale* et *la perpendiculaire au plan oscu-*

lateur. Cette dernière droite, qui est perpendiculaire aux deux autres, s'appelle, à cause de cela, *la binormale*. Ces trois droites forment, en chaque point d'une courbe, *le trièdre principal* et leurs directions, qui sont perpendiculaires entre elles, s'appellent *les directions principales*.

Les cosinus directeurs α, β et γ de la tangente MT menée dans le sens des arcs croissants, et ceux λ, μ, ν de la normale principale sont définis sans ambiguité par les formules (20) du n° 309 et (15) du n° 318, à savoir

$$\frac{\alpha}{x'} = \frac{\beta}{y'} = \frac{\gamma}{z'} = \frac{1}{s'}, \qquad \frac{\lambda}{\alpha'} = \frac{\mu}{\beta'} = \frac{\nu}{\gamma'} = \frac{R}{s'}.$$

Nous désignerons par X, Y et Z les cosinus directeurs de la binormale MB. Ceux-ci étant proportionnels aux coefficients A, B et C de l'équation du plan osculateur, nous aurons

$$(16) \qquad \frac{X}{A} = \frac{Y}{B} = \frac{Z}{C} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Le radical est susceptible d'un double signe, qui correspond aux deux sens opposés dans lesquels on peut mener la binormale MB. Pour déterminer ce sens et, par conséquent, le signe du radical, il faut une nouvelle convention. *Nous conviendrons de mener la binormale* MB *de telle manière que le trièdre principal* MTNB *soit de même rotation que celui* OXYZ *des axes coordonnés*, c'est-à-dire que ces deux trièdres soient superposables, MT sur OX, MN sur OY et MB sur OZ. Pour réaliser cette condition, nous allons montrer qu'*il faut donner au radical qui figure dans les formules* (16) *le signe de s'*.

En effet, considérons le déterminant δ formé avec les cosinus directeurs des directions principales et remplaçons-y α, β, γ et λ, μ, ν par leurs valeurs ci-dessus ; il vient

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \frac{R}{s'^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Substituons encore les valeurs

$$\alpha' = \left(\frac{x'}{s'}\right)' = \frac{x''}{s'} - \frac{s''}{s'^2} x'', \quad \beta' = \frac{y''}{y'} - \frac{s''}{s'^2} y', \quad \gamma' = \frac{z''}{z'} - \frac{s''}{s'^2} z';$$

il vient, par les propriétés des déterminants,

$$\delta = \frac{R}{s'^3} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \frac{R}{s'^3}(AX + BY + CZ).$$

Remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs (16) ; il vient, le radical ayant le même signe que dans ces formnles,

$$\delta = \frac{R}{s'^3}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Reportons-nous à la valeur (12) de R ; il en résulte que δ est égal à $+1$ ou à -1 suivant que le radical a le signe de s' ou le signe contraire (*). Donc, le radical recevant le signe de s', on a $\delta = +1$.

Or $\delta = +1$ *est la condition qui exprime que les deux trièdres* MTNB *et* OXYZ *sont de même rotation.*

En effet, on peut toujours, par un déplacement continu, amener MT en coïncidence avec OX et MN en coïncidence avec OY. Alors MB est dirigé suivant OZ ou en sens contraire ; selon qu'on se trouve dans l'une ou l'autre hypothèse, on a $Z = \pm 1$, d'où

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Mais, si δ était égal à $+1$ avant le déplacement, il le sera encore après, car il ne peut changer brusquement de valeur pendant le déplacement. Donc MB sera venu en coïncidence avec OZ.

320. Torsion. Rayon de torsion. — Après avoir considéré l'angle de deux tangentes menées en deux points différents M et M′ de la courbe, il est naturel de considérer l'angle de deux plans osculateurs. On arrive ainsi à la notion de *seconde courbure* ou de *torsion*.

Comme nous l'avons déjà dit au n° 313, nous admettons dès maintenant l'*existence* des dérivées troisièmes de x, y, z.

(*) Le déterminant δ formé avec les cosinus directeurs de trois directions rectangulaires est toujours égal à $+1$ ou à -1. On le vérifie immédiatement en élevant ce déterminant au carré par la règle connue.

Considérons l'angle ψ des plans osculateurs aux points M et M' ; formons le rapport de cet angle à l'arc MM' : la limite de ce rapport quand M' tend vers M est *la torsion de la courbe au point* M. Le *rayon de torsion* T au point M est l'inverse de la torsion en ce point.

Remarquons que l'angle des plans osculateurs aux points M et M' est le même que celui des binormales en ces mêmes points. Les cosinus directeurs de la binormale ont été désignés par X, Y et Z. Donc le même calcul que celui qui a été fait au n° 317 pour déterminer 1 : R au moyen des cosinus directeurs α, β et γ de la tangente, donnera, dans le cas actuel,

$$\frac{1}{T^2} = \frac{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}{s'^2}. \tag{17}$$

Cette formule suffit pour déterminer la valeur absolue de la torsion et du rayon de torsion. Un examen plus approfondi conduit cependant à donner un signe à la torsion. C'est ce qui sera fait dans le numéro suivant où nous donnerons en même temps la valeur de T en fonction des dérivées de x, y, z.

321. Signe de la torsion. Détermination du rayon de torsion en grandeur et en signe. — On a les trois équations :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad Xx' + Yy' + Zz' = 0, \quad Xx'' + Yy'' + Zz'' = 0.$$

En effet, la première devient identique et les deux suivantes se réduisent aux équations (4 B) quand on remplace X, Y, Z par leurs valeurs (16). Dérivons ces équations en tenant compte de la dernière ; il vient

$$\begin{aligned} XX' + YY' + ZZ' &= 0, \\ x'X' + y'Y' + z'Z &= 0, \\ x''X' + y''Y' + z''Z' &= -(Xx''' + Yy''' + Zz'''). \end{aligned}$$

C'est un système de trois équations résoluble par rapport à X', Y', Z' et dont on tire, en observant que le déterminant du système est $AX + BY + CZ$ (qui est différent de 0 en même temps que $A^2 + B^2 + C^2$),

$$\frac{X'}{Yz' - Zy'} = \frac{Y'}{Zx' - Xz'} = \frac{Z'}{Xy' - Yx'} = \frac{-(Xx''' + Yy''' + Zz''')}{AX + BY + CZ}.$$

Observons que l'on peut remplacer dans le dernier membre de cette suite d'égalités X, Y, Z par les quantités proportionnelles A, B, C et que les dénominateurs des autres membres sont respectivement $\lambda s'$, $\mu s'$, $\nu s'$, car des égalités entre cosinus directeurs de directions rectangulaires

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0, \qquad \lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$

on tire, grâce à la convention sur le sens de la binormale,

$$\frac{\lambda}{\gamma Y - \beta Z} = \frac{\mu}{\alpha Z - \gamma X} = \frac{\nu}{\beta X - \alpha Y} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ X & Y & Z \end{vmatrix}} = 1,$$

d'où

$$Yz' - Zy' = s'(\gamma Y - \beta Z) = \lambda s', \text{ etc....}$$

Il vient par ces substitutions

$$\frac{X'}{\lambda s'} = \frac{Y'}{\mu s'} = \frac{Z'}{\nu s'} = -\frac{D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

en posant en abrégé

$$(18) \qquad D = Ax''' + By''' + Cz''' = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

En vertu de la formule (17), chacun des rapports égaux $X' : \lambda s'$, $Y' : \mu s'$, $Z' : \nu s'$ est encore égal, au signe près, à

$$\frac{\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}}{s'\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}} = \frac{1}{T}.$$

Nous conviendrons de donner un signe à la torsion et de choisir ce signe de manière que chacun des rapports précédents soit égal, même en signe, à $1 : T$. Nous avons ainsi le système de formules :

$$(19) \qquad \frac{X'}{\lambda s'} = \frac{Y'}{\mu s'} = \frac{Z'}{\nu s'} = \frac{1}{T} = -\frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

La dernière montre que T s'exprime rationnellement en fonction des coordonnées du point M, ce qui n'avait pas lieu pour le rayon de courbure. Le signe de la torsion est indépendant du sens dans lequel on compte les arcs puisque la dernière formule est indépendante de s'.

La dernière formule montre que la torsion s'annule avec le déterminant D. On appelle *plans osculateurs stationnaires* ceux qui sont menés aux points où $D = 0$.

322. Théorème. — *La droite, intersection du plan osculateur en* M *(supposé non stationnaire) avec le plan osculateur en un point infiniment voisin* M′, *a pour limite la tangente en* M.

Commençons par une remarque préliminaire. On a

$$\begin{aligned} BC' - CB' &= B(x'y''' - y'x''') - C(z'x''' - x'z''') \\ &= x'(By''' + Cz''') - x'''(By' + Cz'). \end{aligned}$$

Mais $By' + Cz' = -Ax'$; il vient

$$BC' - CB' = x'(Ax''' + By''' + Cz''') = Dx'.$$

On en déduit par permutation circulaire les deux formules analogues :

$$CA' - AC' = Dy', \qquad AB' - BA' = Dz'.$$

Donc, en un point ordinaire où D n'est pas nul, une au moins des trois quantités $BC' - CB'$,... est différente de 0.

Arrivons maintenant au plan osculateur. Considérons x, y, z et A, B, C comme des fonctions de t définies sur la courbe et posons (ξ, η, ζ étant indépendants de t)

$$\Phi(t) = A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z).$$

Les équations des plans osculateurs aux points M et M′ de paramètres t et $t + \Delta t$ seront

$$\Phi(t) = 0, \qquad \Phi(t + \Delta t) = 0.$$

Les coordonnés ξ, η, ζ de l'intersection de ces deux plans vérifient ces deux équations à la fois, donc aussi leur différence $\Delta\Phi = 0$ et aussi $\Delta\Phi : \Delta t = 0$. Quand M′ tend vers M, Δt tend vers 0 et ξ, η, ζ vérifient le système

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0, \\ \Phi'(t) &= A'(\xi - x) + B'(\eta - y) + C'(\zeta - z) = 0, \end{aligned}$$

car $\Phi'(t)$ se simplifie par la relation $Ax' + By' + Cz' = 0$. Mais en vertu de notre remarque préliminaire, ce système peut être résolu par rapport à $(\xi - x)$,... et on en tire, en vertu des relations $BC' - CB' = Dx'$,...

$$\frac{\xi - x}{Dx'} = \frac{\eta - y}{Dy'} = \frac{\zeta - z}{Dz'}.$$

Ce sont les équations de l'intersection-limite (D n'étant pas nul) et elles se confondent avec celles de la tangente.

Remarque. — Le théorème subsiste en général aux points où $D = 0$, mais à condition d'introduire de nouvelles hypothèses sur l'existence des dérivées d'ordre plus élevé. Nous n'examinerons pas cette question ici.

323. Interprétation géométrique du signe de la torsion. — Il résulte du théorème précédent que, quand le point M se déplace sur la courbe dans un sens déterminé, la rotation du plan osculateur se fait autour de la tangente. *Le sens de cette rotation dépend du signe de la torsion.* C'est ce que nous allons montrer.

Soient M un point variable et M_0 un point fixe sur la courbe, φ l'angle de la binormale en M avec la normale principale en M_0. On a

$$\cos\varphi = \lambda_0 X + \mu_0 Y + \nu_0 Z$$

et, en différentiant et utilisant les relations (19),

$$-\frac{d\varphi}{ds}\sin\varphi = \frac{\lambda_0 X' + \mu_0 Y' + \nu_0 Z'}{s'} = \frac{\lambda_0\lambda + \mu_0\mu + \nu_0\nu}{T}.$$

Prenons M_0 dans la position actuelle de M ; nous aurons $\varphi = 90^\circ$, $\lambda = \lambda_0, \ldots$, donc

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{T}.$$

Donc φ et s varient en sens contraire si T est positif, et dans le même sens si T est négatif. Ainsi, *lorsque le point* M *se déplace sur la courbe dans le sens des arcs croissants, la rotation de la binormale autour de la tangente se fait du côté de la normale principale si* T *est positif, et du côté opposé si* T *est négatif.*

Cette règle s'applique, quel que soit le sens de rotation du trièdre OXYZ. S'il est donné comme d'habitude, un observateur qui se tient debout sur le plan YZ du côté de OX, voit la rotation de OY vers OZ se faire de gauche à droite (ou dans le sens des aiguilles d'une montre). Dans ce cas, la règle précédente se transforme dans la suivante : *Un observateur immobile qui regarde s'éloigner le point* M, *verra tourner le plan osculateur dans le sens des aiguilles d'une montre si* T *est positif et dans le sens inverse si* T *est négatif.*

On dit que l'allure de la courbe est *dextrorsum* dans le premier cas (T positif) et *sinistrorsum* dans le second (T négatif). Cette distinction est indépendante du sens dans lequel se fait

le mouvement, car, si ce sens vient à changer, le sens de la rotation et la position de l'observateur sont renversés en même temps et les apparences restent les mêmes.

324. Formules de Frenet. — Les formules de Frenet jouent un rôle important dans la théorie des courbes gauches. Elles ont pour objet d'exprimer les différentielles des cosinus directeurs des directions principales en fonction des cosinus eux-mêmes, de la courbure et de la torsion. Les trois systèmes de formules sont les suivants :

$$(20)\quad \frac{d\alpha}{\lambda}=\frac{d\beta}{\mu}=\frac{d\gamma}{\nu}=\frac{ds}{\mathrm{R}},\qquad (21)\quad \frac{d\mathrm{X}}{\lambda}=\frac{d\mathrm{Y}}{\mu}=\frac{d\mathrm{Z}}{\nu}=\frac{ds}{\mathrm{T}}.$$

$$(22)\quad \frac{d\lambda}{ds}=-\frac{\alpha}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{T}},\quad \frac{d\mu}{ds}=-\frac{\beta}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{T}},\quad \frac{d\nu}{ds}=-\frac{\gamma}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{T}}.$$

Les deux premiers nous sont déjà connus, car ils reviennent à (14) et (19). Pour établir le troisième, on différentie, en tenant compte des deux premiers, les trois équations :

$$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=0,\qquad \mathrm{X}\lambda+\mathrm{Y}\mu+\mathrm{Z}\nu=0,\qquad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1\,;$$

il vient

$$\alpha d\lambda+\beta d\mu+\gamma d\nu=-\frac{ds}{\mathrm{R}},\qquad \mathrm{X}d\lambda+\mathrm{Y}d\mu+\mathrm{Z}d\nu=-\frac{ds}{\mathrm{T}},$$
$$\lambda d\lambda+\mu d\mu+\nu d\nu=0.$$

On ajoute ces équations respectivement multipliées par α, X, λ, ou par β, Y, μ, ou par γ, Z, ν, on obtient les formules (22).

On déduit de ces formules d'importantes conséquences, par exemple les suivantes :

1° *Toute courbe dont la courbure est constamment nulle est une droite.*

En effet, les formules (20) donnent dans ce cas $d\alpha=d\beta=d\gamma=0$, donc α, β, γ sont constants et la ligne est droite (n° 309).

2° *Toute courbe dont la torsion est constamment nulle est plane.*

En effet, les formules (21) donnent alors $d\mathrm{X}=d\mathrm{Y}=d\mathrm{Z}=0$, donc X, Y, Z sont constants. On a alors

$$\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y+\mathrm{Z}z=\text{Const.}$$

car le premier membre a pour dérivée $\mathrm{X}x'+\mathrm{Y}y'+\mathrm{Z}z'$ qui est nul. Donc la courbe est dans le plan représenté par cette équation.

325. Expressions des dérivées successives des coordonnées par rapport à l'arc. — Prenons l'arc s comme variable indépendante. On a d'abord par les formules de Frenet,

$$x' = \alpha, \quad x'' = \alpha' = \frac{\lambda}{R}, \quad x''' = \frac{\lambda'}{R} - \frac{\lambda R'}{R^2} = -\left(\frac{\alpha}{R^2} + \lambda \frac{R'}{R^2} + \frac{X}{RT}\right).$$

Si l'on continue à dériver de proche en proche, en remplaçant chaque fois les dérivées de α, λ, X par leurs valeurs tirées des formules de Frenet, on trouve

$$x^{(n)} = \alpha P_1 + \lambda P_2 + X P_3,$$

où P_1, P_2 et P_3 sont des fonctions rationnelles de R, T et de leurs dérivées successives. Ces mêmes fonctions s'introduisent dans les valeurs de $y^{(n)}$ et de $z^{(n)}$, de sorte que l'on a

$$y^{(n)} = \beta P_1 + \mu P_2 + Y P_3,$$
$$z^{(n)} = \gamma P_1 + \nu P_2 + Z P_3.$$

En particulier pour les trois premiers ordres, les valeurs de P_1, P_2 et P_3 se trouvent dans les expressions de x', x'' et x''' écrites ci-dessus.

Pour faire une application de ces formules, plaçons l'origine des coordonnées à l'origine des arcs, prenons les axes coordonnés suivant les directions principales, OX suivant la tangente, OY suivant la normale principale, OZ suivant la binormale au point O, et proposons-nous de développer x, y et z suivant les puissances de s par la formule de Maclaurin. Bornons-nous seulement au calcul des trois premiers termes. Le développement de x est le suivant :

$$x = x'_0 s + \frac{x''_0}{2} s^2 + \frac{x'''_0}{6} s^3 + \ldots$$

et ceux de y et z sont analogues. Dans le cas actuel, $\alpha_0 = \mu_0 = Z_0 = 1$ et les autres cosinus directeurs au point O sont nuls. On a donc

$$x'_0 = 1, \quad x''_0 = 0, \quad x'''_0 = -\frac{1}{R^2};$$
$$y'_0 = 0, \quad y''_0 = \frac{1}{R}, \quad y'''_0 = -\frac{R'}{R^2};$$
$$z'_0 = 0, \quad z''_0 = 0, \quad z'''_0 = -\frac{1}{RT}.$$

Par conséquent,

$$(23) \quad x = s - \frac{1}{6R^2} s^3 + \ldots, \quad y = \frac{s^2}{2R} - \frac{R'}{6R^2} s^3 + \ldots, \quad z = -\frac{s^3}{6RT} + \ldots$$

Parmi les conséquences de ces formules, nous indiquerons seulement la suivante : *Une courbe traverse chacun de ses plans osculateurs en son point de contact.*

En effet, sauf le cas de R ou bien T infini, la dernière équation montre que z change de signe avec s. A l'origine, le plan osculateur est

celui des xy ; la courbe passe donc d'un côté à l'autre de son plan osculateur. Le point M se mouvant sur la courbe dans le sens des arcs croissants, passe, par rapport au plan osculateur, du côté de la binormale si T est négatif, du côté opposé si T est positif.

326. Hélice circulaire. — Cette courbe est décrite par un point M qui se meut uniformément sur une droite, laquelle tourne elle-même d'un mouvement uniforme autour d'un axe qui lui est parallèle. L'hélice est donc tracée sur un cylindre de révolution. Soient r le rayon de la section droite du cylindre et k une constante. Si l'on prend l'axe du cylindre pour axes des z et si l'on fait passer l'axe des y par un point de la courbe, les équations de l'hélice circulaire sont :

$$x = r \sin t, \qquad y = r \cos t, \qquad z = kt.$$

Nous compterons les arcs dans le sens où t croît, de sorte que nous aurons, h désignant une constante positive,

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{r^2 + k^2} = h.$$

$$\alpha = \frac{x'}{s'} = \frac{y}{h}, \qquad \beta = -\frac{x}{h}, \qquad \gamma = \frac{k}{h}.$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}}{s'} = \frac{r}{h^2}.$$

$$\lambda = R\frac{\alpha'}{s'} = -\frac{x}{r}, \qquad \mu = -\frac{y}{r}, \qquad \nu = 0.$$

$$A = ky, \qquad B = -kx, \qquad C = -r^2, \qquad \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = hr.$$

$$X = \frac{ky}{hr}, \qquad Y = -\frac{kx}{hr}, \qquad Z = -\frac{r}{h}.$$

$$\frac{1}{T} = \frac{X'}{\lambda s'} = \frac{k}{h^2}.$$

Donc : 1° *La courbure et la torsion sont constantes ;* 2° *la tangente, la binormale et la normale principale font des angles constants avec OZ (le dernier étant droit)* ; 3° *la torsion a le signe de k.*

Avec notre convention sur le sens de rotation des axes coordonnés, les spires, vues de l'extérieur du cylindre supposé vertical, paraissent monter de gauche à droite si k est positif (dextrorsum) et de droite à gauche si k est négatif (sinistrorsum).

Les coordonnées du centre de courbure M_1 sont (n° 316) :

$$x_1 = x + R^2\frac{\alpha'}{s'} = -x\left(\frac{k}{r}\right)^2, \qquad y_1 = -y\left(\frac{k}{r}\right)^2, \qquad z_1 = z.$$

Donc *le lieu du centre de courbure est une nouvelle hélice.* Le centre de courbure au point M_1 de cette nouvelle hélice est au point M. Les deux hélices décrites par M et M_1 sont réciproques au point de vue de la courbure : chacune d'elles est le lieu des centres de courbure de

l'autre. C'est d'ailleurs une propriété générale des courbes à courbure constante. (Voir l'exercice 4 à la fin du paragraphe).

Réciproquement, *toute courbe qui a ses deux courbures constantes est une hélice* (Liouville). Ce théorème sera démontré au n° 328.

327. Hélice quelconque. — Une droite AB qui reste parallèle à OZ et dont le point A décrit une courbe PQ dans le plan xy, engendre une surface cylindrique. Supposons que le point M se déplace avec une vitesse constante sur la droite AB pendant que le point A se déplace avec une vitesse constante sur la courbe PQ ; le point M décrit sur la surface du cylindre une courbe appelée *hélice*. Soit σ l'arc de la courbe PQ (section droite du cylindre) ; les équations de l'hélice sont de la forme (k constant)

$$x = \varphi(\sigma), \qquad y = \psi(\sigma), \qquad z = k\sigma.$$

Prenons σ comme variable indépendante ; nous avons

$$x'^2 + y'^2 = 1, \qquad s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{1 + k^2}.$$

Donc : 1° *l'arc s de l'hélice est proportionnel à l'arc σ de la section droite* Il vient alors

$$\gamma = \frac{z'}{s'} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}, \qquad \nu = \mathrm{R}\frac{\gamma'}{s'} = 0.$$

Donc : 2° *la tangente à l'hélice fait un angle constant avec la génératrice du cylindre ;* 3° *la normale principale à l'hélice est normale au cylindre.* Il vient ensuite

$$\frac{1}{\mathrm{R}^2} = \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}{s'^2} = \frac{\alpha'^2 + \beta'^2}{1 + k^2}.$$

Mais $\alpha'^2 + \beta'^2$ est le carré de la courbure de la section droite, donc : 4° *les rayons de courbure aux points correspondants de l'hélice et de la section droite sont proportionnels.* En particulier si l'hélice est à courbure constante, la section droite l'est aussi et devient un cercle (n° 298), donc : 5° *toute hélice à courbure constante est circulaire.*

On tire maintenant des deux premières séries de formules de Frenet

$$(23) \quad \mathrm{R}d\alpha - \mathrm{T}d\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{R}d\beta - \mathrm{T}d\mathrm{Y} = 0, \qquad \mathrm{R}d\gamma - \mathrm{T}d\mathrm{Z} = 0.$$

La dernière équation montre que dZ s'annule avec $d\gamma$, donc Z est constant et : 6° *la binormale à l'hélice fait un angle constant avec la génératrice du cylindre.* Enfin la dernière formule de Frenet devient maintenant (ν étant nul)

$$\frac{d\nu}{ds} = -\frac{\gamma}{\mathrm{R}} - \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{T}} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}} = -\frac{\gamma}{\mathrm{Z}}.$$

et comme γ et Z sont constants, nous voyons que : 7° *les rayous de courbure et de torsion de l'hélice sont dans nn rapport constant.*

Ces diverses propositions admettent des réciproques. C'est ce que ncus allons montrer.

328. Conditions sous lesquelles une courbe est une hélice. — 1° *Toute courbe dont la tangente fait un angle constant avec une droite fixe* OZ, *est une hélice.*

En effet, prenons s pour variable indépendante, on a $z' = \gamma$ (constant), donc en faisant passer le plan des xy par l'origine des arcs, $z = \gamma s$. On a ensuite

$$1 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sigma'^2 + \gamma^2, \qquad \text{d'où} \qquad \sigma' = \sqrt{1 - \gamma^2},$$

et en comptant l'arc σ de la section droite à partir du point correspondant à l'origine de l'arc s, on a $\sigma = \sqrt{1-\gamma^2}\, s$. Donc, en exprimant x, y et z en fonction de σ, on a les équations d'une hélice :

$$x = \varphi(\sigma), \qquad y = \psi(\sigma), \qquad z = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\,\sigma.$$

2° *Toute courbe dont la normale principale est perpendiculaire à une droite fixe* OZ ; *toute courbe dont la binormale fait un angle constant avec* OZ, *est une hélice.*

Ces propositions se ramènent respectivement à la précédente par l'une des formules :

$$d\gamma = \frac{\nu}{R}\, ds, \qquad R\,d\gamma - T\,dZ = 0,$$

qui montrent que $d\gamma$ s'annule soit avec ν, soit avec dZ, auquel cas γ est constant.

3° *Toute courbe dont les deux courbures sont dans un rapport constant est une hélice.*

Posons, en effet,

$$\alpha - \frac{T}{R}X = a, \qquad \beta - \frac{T}{R}Y = b, \qquad \gamma - \frac{T}{R}Z = c\,;$$

a, b, c seront constants, car leurs différentielles seront nulles en vertu des équations (**23**). Additionnons les trois équations ci-dessus respectivement multipliées par α, β, γ, il vient

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 1.$$

Cette équation exprime que la tangente fait un angle constant avec une droite de coefficients directeurs a, b, c, ce qui ramène au cas 1°.

4° *Toute courbe dont les deux courbures sont constantes est une hélice circulaire.*

En effet, c'est une hélice en vertu de la proposition précédente et, comme elle est à courbure constante, elle est circulaire. (Voir ci-dessus, n° 327, 5°).

329. Courbes de Bertrand. — On appelle *courbes de Bertrand* celles dont les deux courbures sont liées par une relation linéaire. On est conduit à ces courbes quand on se propose le problème suivant :

Trouver une courbe gauche dont la normale principale soit aussi la normale principale d'une autre courbe.

Soit $M(x, y, z)$ le point qui décrit la première courbe, $M_1(x_1\, y_1, z_1)$ celui qui décrit la seconde. Nous écrirons sans indice les éléments relatifs à la courbe (M) et avec l'indice 1 ceux relatifs à la courbe (M_1).

Soit ρ la distance MM_1 et ψ l'angle de la tangente M_1T_1 avec la tangente MT, angle compté positivement du côté de la binormale MB. Ces deux quantités ρ et ψ sont constantes. En effet, on a

$$d\rho^2 = d\Sigma(x - x_1)^2 = 2\Sigma(x - x_1)dx - 2\Sigma(x - x_1)dx_1$$

et chacune de ces deux sommes est nulle, car M et M_1 se déplacent normalement à ρ, donc $d\rho^2 = 0$. D'autre part, en vertu des formules de Frenet, on voit facilement (λ, μ, ν et λ_1, μ_1, ν_1 étant identiques) que $\Sigma\alpha d\alpha_1$ et $\Sigma\alpha_1 d\alpha$ sont nuls, d'où

$$d \cos \psi = d(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) = 0.$$

Donc *les trièdres principaux relatifs aux deux courbes sont invariablement liés entre eux.*

D'autre part, en dérivant par rapport à s les trois relations : $x_1 = x + \lambda\rho$, $y_1 = \ldots$, $z_1 = \ldots$ où ρ est constant, il vient

$$(1) \qquad \alpha_1 \frac{ds_1}{ds} = \alpha - \left(\frac{\alpha}{R} + \frac{X}{T}\right)\rho, \qquad \beta_1 \frac{ds_1}{ds} = \ldots, \qquad \gamma_1 \frac{ds_1}{ds} = \ldots$$

Multipliant par α, β, γ et ajoutant ; par X, Y, Z et ajoutant, il vient

$$(2) \qquad \frac{ds_1}{ds} \cos \psi = 1 - \frac{\rho}{R}, \qquad \frac{ds_1}{ds} \sin \psi = -\frac{\rho}{T} ;$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} - \frac{\cot \psi}{T}.$$

Donc les deux courbures de la courbe (M) sont liées par une relation linéaire. *La courbe* (M) *est une courbe de Bertrand* et la courbe (M_1) en est une aussi, pour les mêmes raisons.

Réciproquement, toute courbe de Bertrand (M) *est conjuguée à une autre courbe* (M_1) *ayant même normale principale.*

En effet, si la courbe (M) satisfait à la relation (p, q constants)

$$(4) \qquad \frac{p}{R} - \frac{q}{T} = 1,$$

je dis que la courbe (M_1) que l'on en déduit en portant MM_1 (ou ρ) égal à p sur la normale principale, aura cette normale principale commune avec (M).

En effet, ρ étant constant, on a les équations (1), d'où l'on tire, en multipliant par λ, μ, ν et ajoutant, $\Sigma\lambda\alpha_1 = 0$, ce qui montre que MM_1 est une normale à (M_1). Donc on a, comme plus haut, les équations (2) et (3) et, par comparaison avec (4), $\cot\psi = q : p$. Donc ψ est constant et il vient, à cause de $\Sigma\lambda\alpha_1 = 0$,

$$0 = d\cos\psi = d\Sigma\alpha\alpha_1 = \frac{ds_1}{R_1}\Sigma\alpha\lambda_1,$$

$$0 = d\sin\psi = d\Sigma X\alpha_1 = \frac{ds_1}{T}\Sigma X\lambda_1.$$

Donc la normale principale à (M_1) est normale à MT et à MB et coïncide avec MM_1.

Une courbe qui a ses normales principales communes avec deux autres courbes est une hélice circulaire, et les normales principales sont alors communes à une infinité d'hélices circulaires.

En effet, R et T, étant alors liés par deux relations linéaires distinctes, sont constants et la courbe est une hélice circulaire. D'autre part, la longueur constante MM_1 peut alors être prise arbitrairement. Toutes les hélices décrites par M_1 sont tracées sur des cylindres concentriques.

Exercices.

1. Appliquer les formules générales à la courbe

$$y = x^2 : 2a, \qquad z = x^3 : 6a^2.$$

R. En choisissant convenablement le sens des arcs, on a

$$\frac{ds}{dx} = \frac{a+y}{a}.$$

Ensuite (ε désignant l'unité du même signe que a)

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{x} = \frac{\gamma}{y} = \frac{1}{a+y}, \quad \begin{cases} \lambda = \varepsilon\beta, & \mu = \varepsilon(\alpha-\gamma), & \nu = \varepsilon\beta; \\ X = \varepsilon\gamma, & Y = -\varepsilon\beta, & Z = \varepsilon\alpha. \end{cases}$$

$$-T = \varepsilon R = (a+y)^2 : a.$$

2. Même question pour la courbe

$$y = x^3 : 3a^2, \qquad z = a^2 : 2x.$$

R. On a, en choisissant convenablement le sens des arcs,

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2x^4 + a^4}{2a^2x^2}.$$

Ensuite (ε désignant l'unité du même signe que x)

$$\frac{\alpha}{2a^2x^2} = \frac{\beta}{2x^4} = -\frac{\gamma}{a^4} = \frac{1}{2x^4+a^4}; \quad \begin{cases} \lambda = -\varepsilon(\beta+\gamma), & \mu = \varepsilon\alpha, & \nu = \varepsilon\alpha; \\ X = \varepsilon\alpha, & Y = \varepsilon\gamma, & Z = \varepsilon\beta. \end{cases}$$

$$T = \varepsilon R = \frac{(2x^4 + a^4)^2}{8a^4x^3}.$$

3. Calculer les dérivées des coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre de courbure M_1 d'une courbe gauche et celle de l'arc s_1 décrit par ce point.

R. On dérive les relations $x_1 - x = R\lambda, \ldots$ et l'on tient compte des formules de Frenet. On trouve

$$x_1' = \lambda R' - X \frac{R}{T} s', \qquad y_1' = \mu R' - Y \frac{R}{T} s', \qquad z_1' = \nu R' - Z \frac{R}{T} s',$$

$$s_1'^2 = R'^2 + \frac{R^2}{T^2} s'^2.$$

4. *Courbes à courbure constante.* — Le lieu du centre de courbure M_1 d'une courbe gauche à courbure constante jouit de propriétés remarquables. On tire, dans ce cas, des équations de l'exercice précédent

$$\frac{x_1'}{X} = \frac{y_1'}{Y} = \frac{z_1'}{Z} = -\frac{R}{T} s' = s_1'.$$

En affectant de l'indice 1 les quantités qui se rapportent au lieu du point M_1, il vient

$$\alpha_1 = X, \qquad \beta_1 = Y, \qquad \gamma_1 = Z.$$

Donc la tangente au point M_1 est parallèle à la binormale au point M. On a ensuite les trois relations :

$$\alpha_1' = X', \qquad \beta_1' = Y', \qquad \gamma_1' = Z'.$$

On en tire d'abord

$$\alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{s_1'^2}{R_1^2} = \frac{s'^2}{T^2} \quad \text{et} \quad R_1 = R\,;$$

ensuite, au moyen des formules de Frenet,

$$\lambda_1 = -\lambda, \qquad \mu_1 = -\mu, \qquad \nu_1 = -\nu.$$

On en conclut que le point M est le centre de courbure au point M_1 de la courbe décrite par ce centre de courbure. Donc les deux courbes considérées, la courbe génératrice et la courbe décrite par son centre de courbure, sont réciproquement les lieux des centres de courbure l'une de l'autre.

5. *Courbes sphériques.* — On appelle ainsi les courbes tracées sur une sphère. L'origine étant au centre, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 = \text{const.}$$

En dérivant par rapport à s et en se servant des formules de Frenet, on en déduit, de proche en proche,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \qquad \lambda x + \mu y + \nu z = -R, \qquad Xx + Yy + Zz = -R'T$$

d'où

$$x = -\lambda R + XTR' \qquad y = -\mu R + YTR', \qquad z = -\nu R + ZTR'.$$

Soit θ l'angle de la normale principale en M avec la normale inté-

rieure à la sphère, on conclut, sans peine, des formules précédentes : 1° que l'on a, les dérivées étant toujours prises par rapport à l'arc,

$$R = \rho \cos \theta, \qquad 1 : T = \pm \theta', \qquad R^2 + (TR')^2 = \rho^2 ;$$

2° que toute courbe sphérique à courbure constante est plane et qu'elle est, par conséquent, un cercle de la sphère.

6. Soit $s = MM'$ un arc infiniment petit d'une courbe gauche. Démontrer que : la distance δ du point M' au plan osculateur en M, la plus courte distance δ' des tangentes en M et en M', la différence ε entre l'arc s et sa corde, ont respectivement pour expressions, aux infiniment petits près du 4e ordre :

$$\delta = \frac{s^3}{6RT}, \qquad \delta' = \frac{s^3}{12RT}, \qquad \varepsilon = \frac{s^3}{24\,R^2}.$$

R. Ce sont des conséquences faciles à tirer des formules **(23)** données au n° 325, et il en est de même de la proposition formulée dans l'exercice suivant :

7. Soit $s = MM'$ un arc infiniment petit d'une courbe gauche. Démontrer que la distance du point M' à la tangente MT a pour valeur $s^2 : 2R$, aux infiniment petits près du troisième ordre.

CHAPITRE X.

Calcul des aires, des arcs et des volumes. Evaluation approchée des intégrales définies.

§ 1. Quadrature des aires planes.

330. Quadrature des aires planes (coordonnées cartésiennes). — Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) $(a < b)$. Considérons la courbe plane qui a pour équation

$$y = f(x),$$

par rapport à deux axes OX et OY se coupant sous un angle λ. Proposons-nous d'évaluer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux droites $x = a$ et $x = b$.

Supposons, pour commencer, que $f(x)$ soit constamment positif dans l'intervalle (a, b). Alors le problème à résoudre est celui que nous avons déjà examiné au n° 222, mais en axes rectangulaires. La solution est analogue pour des axes quelconques. Décomposons l'aire en segments par des parallèles à l'axe des y d'abscisses successives $x_1 = a, x_2, x_3 \dots x_i, \dots x_{n+1} = b$ et soient, en général, M_i et m_i les bornes supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) d'amplitude δ_i. L'aire du segment de base δ_i est intermédiaire entre celles des deux parallélogrammes de même base δ_i, l'un inscrit dans le segment et l'autre circonscrit. Ces parallélogrammes ont respectivement pour mesures $m_i\delta_i \sin\lambda$ et $M_i\delta_i \sin\lambda$. L'aire S à évaluer sera comprise entre les deux sommes :

$$\sin\lambda \sum_1^n m_i\delta_i \qquad \text{et} \qquad \sin\lambda \sum_1^n M_i\delta_i.$$

Elle a donc pour valeur la limite commune de ces deux sommes quand tous les δ_i tendent vers zéro. Il vient ainsi, par définition de l'intégrale définie (n° 219),

$$(1) \qquad S = \sin\lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

Si l'on suppose maintenant que $f(x)$ soit constamment négatif dans l'intervalle (a, b), le raisonnement précédent subsiste, sauf que que toutes les mesures considérées sont négatives, et la formule (1) donne pour S une valeur négative. Les aires calculées par cette formule sont donc positives quand la courbe est située au-dessus de l'axe des x, et négatives quand la courbe est située au-dessous.

Enfin, si la courbe traverse une ou plusieurs fois l'axe OX, la formule fournit seulement la différence entre les aires situées de part et d'autre de cet axe. Dans ce cas, si l'on veut calculer l'aire totale, il faut donc évaluer séparément les aires positives et négatives et faire la somme de leurs valeurs absolues.

Lorsque les axes sont rectangulaires, $\sin \lambda = 1$. La formule se simplifie et prend la forme la plus habituelle :

$$S = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx. \tag{2}$$

331. Les formules précédentes permettent d'évaluer l'aire comprise entre deux courbes. Supposons que ces courbes aient pour équations :

$$y_1 = f_1(x), \qquad y_2 = f_2(x)$$

et que l'on ait constamment $f_1(x) < f_2(x)$. L'aire S comprise entre les deux courbes et les deux droites $x = a$ et $x = b$, sera la différence algébrique entre les deux aires S_2 et S_1 comprises entre ces deux droites et l'axe des x, mais limitées respectivement à chacune des deux courbes. On a donc $S = S_2 - S_1$ Si les axes sont rectangulaires, la formule (2) s'applique au calcul de S_2 et de S_1 et il vient

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \tag{3}$$

Si les axes sont obliques, l'intégrale précédente doit être multipliée par $\sin \lambda$.

La formule (3) s'emploie pour calculer l'aire d'une courbe fermée qui n'est rencontrée qu'en deux points par une parallèle à l'axe des y.

Dans ce cas, l'équation de la courbe fournit pour y les deux valeurs $f_1(x)$ et $f_2(x)$ que l'on doit substituer dans la formule, et l'on prend pour a et b les valeurs extrêmes de x sur la courbe.

332. Applications (coordonnées cartésiennes). — I. PARABOLE. La parabole, rapportée à un diamètre OX et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre, a pour équation $y^2 = 2px$, d'où

$$f(x) = \sqrt{2p}\,\sqrt{x}.$$

L'aire comprise, au-dessus de l'axe OX, entre cet axe, la courbe et la corde d'abscisse x, sera donc

$$S = \sqrt{2p}\sin\lambda \int_0^x \sqrt{x}\,dx = \sqrt{2p}\sin\lambda\,\frac{2}{3}\,x = \frac{2}{3}\,xy\sin\lambda.$$

Cette aire vaut donc les deux tiers du parallélogramme construit sur les deux côtés rectilignes, x et y, de l'aire considérée. La relation analogue existe entre les aires correspondantes situées au-dessous de l'axe OX. Donc *le segment détaché de la parabole par une corde quelconque est égal aux deux tiers du parallélogramme construit sur sa corde et sur sa flèche* (portion du diamètre conjugué intérieure au segment).

II. CERCLE. L'équation d'un cercle en coordonnées rectangulaires est

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Le segment situé au-dessus du diamètre OX entre les cordes $x = 0$ et $x = x$, a donc pour valeur

$$S = \int_0^x dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a},$$

ainsi qu'il résulte de la valenr de l'intégrale indéfinie, calculée au n° 190.

Si $x = a$, on obtient l'aire du quart de cercle, $\pi a^2 : 4$. Donc l'aire du cercle entier est πa^2.

III. ELLIPSE. L'éllipse étant rapportée à ses axes, son équation se ramène à la forme

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Le segment situé au-dessus de l'axe OX entre les cordes $x = 0$ et $x = x$, s'obtient en multipliant par $b : a$ l'aire que nous venons d'obtenir pour le cercle. Donc l'aire de l'ellipse entière sera πab.

IV. HYPERBOLE. L'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes est de la forme

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

L'aire S comprise (fig. 9) entre l'arc de la courbe AM, l'axe horizontale OX et la verticale MP d'abscisse $x (x > a)$ a pour valeur

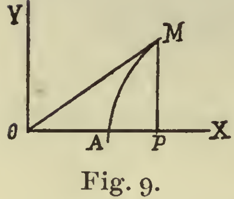


Fig. 9.

$$S = \frac{b}{a}\int_a^x dx\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Calculons d'abord l'intégrale indéfinie. Une intégration par partie donne

$$\int dx\sqrt{x^2 - a^2} = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Si l'on remplace $x^2 dx$ par $(x^2 - a^2)\,dx + a^2 dx$, la dernière intégrale se décompose en deux autres, dont celle du premier membre. On en conclut

$$2\int dx\sqrt{x^2 - a^2} = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

$$\int dx\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

De là résulte facilement la valeur de S :

$$S = \frac{b}{2a}\,x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2}\operatorname{Log}\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a};$$

et, en se servant de l'équation de la courbe,

$$S = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Le premier terme de S mesure l'aire du triangle OPM (fig. 9). Donc le second terme, pris en valeur absolue, mesure l'aire du secteur OAM (secteur hyperbolique).

Si l'hyperbole est rapportée à ses asymptotes, son équation est $xy = k^2$. L'aire comprise entre la courbe, l'asymptote OX et deux parallèles à l'autre asymptote d'abscisses x_0 et x, a pour mesure (λ étant l'angle des asymptotes)

$$S = \sin\lambda \int_{x_0}^{x} \frac{k^2}{x}\,dx = k^2 \sin\lambda \operatorname{Log}\frac{x}{x_0}.$$

C'est cette propriété des logarithmes néperiens qui leur a fait donner le nom de logarithmes hyperboliques.

On remarquera que l'aire S augmente indéfiniment quand x tend vers l'infini ou quand x_0 tend vers 0. La portion du plan

comprise entre une branche de la courbe et ses asymptotes à donc une aire infinie.

IV. Cycloïde. — Si l'on prend pour variable d'intégration l'angle t (n° 283), on aura

$$ydx = a^2(1 - \cos t)^2\, dt.$$

L'aire S de la cycloïde comptée depuis l'origine où $t = 0$ jusqu'à l'ordonnée qui répond à l'angle t, aura pour mesure

$$S = a^2 \int_0^t (1 - \cos t)^2\, dt = a^2 \left(\frac{3t}{2} - \sin t + \frac{\sin t \cos t}{2}\right).$$

Retranchons cette aire OMP (fig. 10) de celle de rectangle OPFG qui a pour valeur $2ax$ ou bien $2a^2(t - \sin t)$, le reste, c'est-à-dire l'aire OMFG, sera égal à

$$\frac{a^2}{2}\left(t - \sin t \cos t\right),$$

Fig. 10.

ce qui est précisément l'aire du segment AMQ déterminé, dans le cercle générateur, par la perpendiculaire MQ sur le diamètre AB. On a donc

$$\text{surf. OMFG} = \text{surf. AMQ}.$$

A l'extrémité de l'arcade, $t = 2\pi$ et $S = 3\pi a^2$. Donc *l'aire totale entre une arcade de cycloïde et sa base est triple de l'aire du cercle générateur.*

333. Quadrature des secteurs (coordonnées polaires). — Considérons l'équation d'une courbe plane en coordonnées polaires

$$r = f(\theta),$$

où $f(\theta)$ est une fonction continue entre θ_1 et Θ ($\theta_1 < \Theta$).

Proposons-nous d'évaluer l'aire du secteur compris entre un arc de la courbe et les deux rayons vecteurs d'inclinaisons θ_1 et Θ. Pour cela, décomposons cette aire en secteurs élémentaires par des rayons vecteurs intermédiaires d'inclinaisons successives $\theta_2, \ldots\ \theta_i, \ldots\ \theta_n$, et soit $\theta_{n+1} = \Theta$. L'aire d'un secteur quelconque, limité par deux rayons consécutifs d'inclinaisons θ_i et θ_{i+1}, est comprise entre celles de deux secteurs circulaires de même ouverture $(\theta_{i+1} - \theta_i)$, mais ayant respectivement pour rayons le minimé m_i et le maximé M_i de $f(\theta)$

dans l'intervalle (θ_i, θ_{i+1}). Ces deux secteurs circulaires ont respectivement pour mesures $\frac{1}{2} m_i^2(\theta_{i+1} - \theta_i)$ et $\frac{1}{2} M_i^2 (\theta_{i+1} - \theta_i)$. Donc le secteur entier de la courbe sera compris entre les deux sommes :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2(\theta_{i+1} - \theta_i), \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Si l'on multiplie indéfiniment le nombre des secteurs élémentaires, de manière à faire tendre vers zéro toutes leurs ouvertures $(\theta_{i+1} - \theta_i)$, ces deux sommes tendent vers une limite commune, qui sera la valeur de S. Cette limite est une intégrale définie ; on a donc

$$(4) \qquad S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\Theta} f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\Theta} r^2 d\theta.$$

Rrmarque I. — On peut appliquer la formule (4) à des courbes qui décrivent plusieurs spires autour du pôle. Dans ce cas, l'intervalle d'intégration peut croître au delà de quatre angles droits et la formule représente l'aire totale balayée par le rayon vecteur quand il tourne dans le même sens de θ à Θ. Donc, quand le rayon tourne de plus d'un tour, les aires décrites se recouvrent l'une l'autre.

Remarque II. — On peut transformer la formule (4) de manière à la rendre immédiatement applicable au cas des coordonnées cartésiennes. On a, en effet,

$$r^2 d\theta = (x^2 + y^2) d. \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x dy - y dx.$$

Supposons x et y exprimés en fonction d'une variable t, qui varie de t_1 à t_2 quand le point (x, y) décrit l'arc limitant le secteur, et prenons t comme variable d'intégration. La formule (4) se transforme dans la suivante :

$$(5) \qquad S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{x\, dy - y\, dx}{dt} dt.$$

334. Applications (Coordonnées polaires). — I. Spirale d'Archimède : $r = a\theta$. L'aire S depuis l'origine jusqu'au rayon vecteur r, a pour mesure

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\theta} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\theta} \theta^2 d\theta = \frac{a^2\theta^3}{6} = \frac{r^3}{6a}.$$

Si l'on fait $= 2\pi$, on obtient l'aire entourée par la première spire, à savoir $\frac{4}{3}\cdot\pi^3 a^2$.

II. Spirale logarithmique : $r = ae^{m\theta}$. Cette courbe décrit une infinité de spires autour de l'origine. Cherchons l'aire du secteur S compris entre un arc de la courbe et les deux rayons vecteurs r_1 et R d'inclinaisons θ_1 et Θ. On aura

$$S = \frac{a^2}{2}\int_{\theta_1}^{\Theta} e^{2m\theta}\, d\theta = \frac{a^2}{4m}(e^{2m\Theta} - e^{2m\theta_1}) = \frac{R^2 - r_1^2}{4m}.$$

Si l'on fait tendre θ_1 vers $-\infty$, r_1 tend vers zéro et S vers $R^2 : 4m$. On obtient ainsi la limite de la somme des aires entourées par un nombre illimité de spires qui se rapprochent indéfiniment du pôle.

III. Lemniscate : $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. Cette courbe se compose de deux feuilles symétriques. L'aire du secteur compris entre l'axe polaire et le rayon d'inclinaison θ, sera

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{\theta} \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{4}\sin 2\theta.$$

Si l'on fait $\theta = \pi : 4$, on obtient l'aire $a^2 : 4$ d'une demi-feuille. L'aire totale de la courbe est a^2.

335. Aire limitée par une courbe fermée. Notion des intégrales curvilignes. — On appelle *contour fermé simple* un contour fermé qui ne se coupe pas lui-même. Un tel contour enferme une aire que l'on peut se proposer d'évaluer.

Nous savons déjà calculer cette aire lorsque le contour se réduit au quadrilatère curviligne envisagé au n° 331. Ce contour se compose de deux parallèles à l'axe des y d'abscisses a et b et de deux courbes A_1B_1 et A_2B_2 qui ferment le quadrilatère, et qui ont pour équations dans l'intervalle (a, b) :

$$y_1 = f_1(x), \qquad y_2 = f_2(x), \qquad y_1 < y_2.$$

L'aire intérieure au contour a, dans ce cas, pour valeur (n° 331)

$$(6) \qquad S = \int_a^b y_2 dx - \int_a^b y_1 dx.$$

Ces deux intégrales ont la même forme $\int y dx$ et, pour achever de les déterminer, il suffit de faire connaître les arcs A_2B_2

et A_1B_1 que parcourt le point (x, y) pendant l'intégration et le sens dans lequel se fait le parcours. Nous dirons donc que ces deux intégrales sont des intégrales curvilignes (*) et nous les représentons par les notations

$$\int_{A_2B_2} ydx, \qquad \int_{A_1B_1} ydx.$$

Cette notation désigne l'arc par ses extrémités ; on écrit d'abord le point de départ, ce qui fait connaître le sens du parcours. Renverser ce sens revient à intervertir les limites a et b des intégrales et, par conséquent, à changer leur signe. L'équation (6) peut donc s'écrire maintenant

$$(7)\quad S = \int_{A_2B_2} ydx - \int_{A_1B_1} ydx = \int_{A_2B_2} ydx + \int_{B_1A_1} ydx.$$

Un contour fermé peut être parcouru dans deux sens différents. On appelle *sens direct* celui qui laisse à gauche l'intérieur de l'aire. L'autre est le *sens rétrograde*. Donc, dans les dernières intégrales, les arcs A_2B_2 et B_1A_1 sont parcourus dans le sens rétrograde.

Considérons maintenant un contour simple C, formé d'un nombre limité d'arcs successifs sur chacun desquels x varie toujours dans le même sens quand on décrit le contour. Ce cas est évidemment très général. Appelons *intégrale effectuée sur le contour* et désignons par

$$\int_{(C)} ydx$$

la somme des intégrales curvilignes effectuées *dans le sens direct* sur chacun des arcs successifs qui composent le contour. Je dis que l'aire S intérieure au contour aura pour mesure

$$(8)\qquad S = -\int_{(C)} ydx.$$

En effet, en menant des parallèles à l'axe des y par les points de séparation des arcs successifs, on décompose l'aire S en mor-

(*) Les intégrales curvilignes sont présentées ici au point de vue le plus élémentaire. La définition générale sera donnée § 3.

ceaux, dont les frontières respectives n'empruntent que deux arcs distincts du contour C et qui s'évaluent, par conséquent, par la formule (7). L'aire de chaque morceau se mesure par la somme des intégrales effectuées dans le sens rétrograde sur les deux portions du contour C qui lui servent de frontières. Faisons la somme de ces aires ; nous obtiendrons l'intégrale effectuée dans le sens rétrograde sur tout le contour, c'est-à-dire la formule (8).

Remarque I. — Le contour C peut aussi comprendre des portions de droites. Il n'y a de remarque à faire que pour celles qui seraient parallèles à l'axe des y. Dans ce cas, comme elles n'interviennent pas dans l'évaluation des morceaux, elles ne doivent pas intervenir non plus dans l'évaluation de l'aire totale. Cependant, si l'on attribue la valeur 0 à l'intégrale effectuée sur ces lignes (ce qui est naturel, x étant constant et dx nul), on peut étendre l'intégration à tout le contour et considérer la formule (8) comme générale.

Remarque II. — La formule (8) sera d'une application immédiate si x et y sont exprimés en fonctions continues d'une variable auxiliaire t et admettent des dérivées continues par rapport à t. Supposons, en effet, que le point (x, y) décrive tout le contour C dans le sens rétrograde quand t varie de t_1 à T. Prenons t comme variable d'intégration ; l'aire S intérieure au contour C s'évaluera par la formule

$$S = \int_{t_1}^{T} y \frac{dx}{dt} dt. \tag{9}$$

Remarque III. Nous avons établi la formule (8) en considérant y comme fonction de x. On peut établir une formule analogue en considérant x comme fonction de y. Mais il faut supposer des conditions correspondantes. Cette formule sera

$$S = \int_{(C)} x dy, \tag{10}$$

car le contour doit être parcouru dans le sens direct pour que l'intégrale soit positive.

La combinaison des formules (8) et (10) donne encore une formule, souvent employée,

$$S = \frac{1}{2}\int_C x dy - \frac{1}{2}\int_C y dx,$$

que l'on écrit plus simplement

$$(11) \qquad S = \frac{1}{2}\int_C (xdy - ydx).$$

Ces nouvelles formules s'appliquent avantageusement, comme la formule (8), au cas où la courbe est donnée par une représentation paramétrique (*). On trouvera dans le n° suivant l'application de ces formules à la démonstration du remarquable théorème de Holditch.

336. Théorème de Holditch. — *Une corde de longueur constante* c + c′ *se meut d'un mouvement continu en s'appuyant par ses extrémités sur une courbe fermée donnée,* C, *qui ne se coupe pas. Si ces deux extrémités font le tour de la courbe* C *(on suppose ce mouvement possible avec des rétrogradations au besoin), l'aire comprise entre la courbe et le lieu du point* M *qui partage la corde en deux segments* c *et* c′, *a pour mesure* $\pi cc'$, *quelle que soit la courbe donnée, pourvu que* M *décrive un contour simple.*

Désignons par K la courbe décrite par M et supposons que cette courbe forme un contour simple. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées variables des extrémités de la corde ; celles du point M seront

$$x = \frac{cx_1 + c'x_2}{c + c'} \qquad y = \frac{cy_1 + c'y_2}{c + c'}.$$

Imaginons que les coordonnées soient exprimées en fonction d'un paramètre t qui varie de t_1 à T quand les extrémités de la corde décrivent la courbe C. Prenons t comme variable. Les aires S et Σ intérieures aux courbes C et K pourront s'évaluer par les intégrales :

$$S = \int_{t_1}^{T} y_1 dx_1 = \int_{t_1}^{T} y_2 dx_2 = \int_{t_1}^{T} \frac{(c^2 + cc')y_1dx_1 + (cc' + c'^2)y_2dx_2}{(c + c')^2},$$

$$\Sigma = \int_{t_1}^{T} ydx = \int_{t_1}^{T} \frac{(cy_1 + c'y_2)(cdx_1 + c'dx_2)}{(c + c')^2}.$$

où l'on suppose les x et les y exprimés en fonction de t. On en déduit par soustraction

$$S - \Sigma = \frac{cc'}{(c + c')^2}\int_{t_1}^{T} (y_2 - y_1)(dx_2 - dx_1).$$

Menons, à partir de l'origine, une droite égale et parallèle à la corde. Les coordonnées de l'extrémité seront $\eta = y_2 - y_1$ et $\xi = x_2 - x_1$. Or cette extrémité décrit un cercle de rayon $(c + c')$. L'intégrale qui figure dans la dernière équation n'est autre chose que l'intégrale de $\eta d\xi$ effec-

(*) Les démonstrations les plus générales des formules (8), (10) et (11) seront données au § 4.

tuée sur ce cercle. Donc elle mesure l'aire du cercle et sa valeur est $\pi(c+c')^2$. Il vient donc

$$S - \Sigma = \pi cc'.$$

Si les courbes C et K ne se coupent pas, le théorème est donc démontré. Si elles se coupent, il reste vrai, à condition d'attribuer des signes contraires aux aires situées de part et d'autre de la courbe C. Mais le théorème tomberait en défaut si le lieu du point M ne constituait pas un contour simple. Le théorème suppose encore les courbes C et K soumises aux conditions que nous avons indiquées au nº précédent pour que les formules soient légitimes.

Exercices.

1. Aire de la *chainette*, comptée de l'axe de la courbe.

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad S = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

2. Aire de la *cissoïde* : $y^2 = x^3 : (2a - x)$.

$$S = \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = 8a^2 \int_{\sqrt{\frac{2a-x}{x}}}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Si l'on fait $x = 2a$, on trouve $S = 3\pi a^2 : 2$. Doublant cette valeur, on trouve $3\pi a^2$ pour l'espace indéfini compris entre la cissoïde et son asymptote $x = 2a$. C'est le triple de l'aire du cercle de rayon a.

3. Aire du *limaçon de Pascal* : $r = a\cos\theta + b$.

4. Aire de la *conchoïde* : $r = a\sec\theta + b$.

5. Aire de *l'épicycloïde*. — On a indiqué (p. 302, exercice 4) les équations de l'épicycloïde engendrée par le roulement d'un cercle de rayon b sur un cercle de rayon a. Dans ces équations, le paramètre t désigne l'angle dont le point de contact a tourné sur le cercle fixe. On peut aussi prendre comme paramètre l'angle θ dont ce point a tourné sur le cercle mobile. On a $at = b\theta$. En posant $b : a = q$, les équations de l'épicycloïde s'écriront

$$\frac{x}{a} = (1+q)\cos q\theta - q\cos(1+q)\theta, \quad \frac{y}{a} = (1+q)\sin q\theta - q\sin(1+q)\theta.$$

L'aire d'un secteur se détermine alors par la formule (5) du nº 333 ; on trouve

$$S = \frac{1}{2}a^2 q(1+q)(1+2q)\int_0^\theta (1+\cos\theta)\,d\theta = \frac{b}{2a}(a^2+3ab+2b^2)(\theta+\sin\theta)$$

Si $\theta = 2\pi$, on obtient l'aire du secteur limité par une arcade entière de la courbe. Pour obtenir l'aire de l'arcade elle-même, il faut encore

retrancher l'aire d'un secteur du cercle fixe dont l'arc est $2\pi b$; il restera

$$\frac{\pi b^2}{a}(3a+2b).$$

6. *Hypocycloïde.* — Les équations de l'hypocycloïde s'obtiennent en remplaçant dans les précédentes q par $-q$. Problèmes analogues aux précédents.

7. *Courbes unicursales.* — Les coordonnées x et y d'une courbe unicursale peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre t. Donc la quadrature de ces courbes dépend d'une intégrale rationnelle et peut toujours se faire sous forme finie. Dans le cas particulier où le paramètre t est égal à $y : x$, on a $xy' - yx' = x^2$. L'aire d'un secteur se calculera par la formule (5) du n° 333, qui prendra la forme simple

$$S = \frac{1}{2}\int x^2 dt.$$

Appliquer cette formule aux cubiques unicursales suivantes, dont les coordonnées s'obtiennent immédiatement en fonction rationnelle de $t = \frac{y}{x}$:

$x(x^2+y^2) = 2ay^2$ (cissoïde),
$(x+a)(x^2+y^2) = 3ay^2$ (strophoïde),
$x^3+y^3 = 3axy$ (Follium de Descarte).

§ 2. Rectification des courbes.

337. Courbes rectifiables. Rectification des courbes planes. — La longueur d'un arc de courbe entre deux points extrêmes est, par définition (n°s 286 et 306), la limite (supposée finie et déterminée) du périmètre d'un polygone inscrit dans la courbe et dont tous les côtés tendent vers zéro. Cette limite n'existe pas toujours et l'on appelle *rectifiables* les courbes dont l'arc a une longueur finie et déterminée. Nous renverrons au paragraphe suivant pour l'étude des caractères les plus généraux des courbes rectifiables et nous nous bornerons ici aux conditions sur lesquelles nous avons fait reposer les formules des n°s 286 et suivants.

Considérons d'abord une courbe plane, ayant pour équation

$$y = f(x) ;$$

la longueur de son arc depuis un point fixe M_0 d'abscisse x_0 jusqu'au point variable M d'abscisse x, s'évalue pour la formule (n° 287)

$$(1) \qquad s = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+y'^2}.$$

Les formules de rectification qui conviennent aux autres formes d'équations s'obtiennent en changeant de variable dans l'intégrale définie

$$s = \int_0^s ds.$$

Dans le cas d'une représentation paramétrique, on prend t comme variable ; on sait (n° 287) que $ds = dt\sqrt{x'^2 + y'^2}$. Donc, t_0 et t désignant les paramètres des extrémités, l'arc aura pour mesure

(2) $$s = \int_{t_0}^t dt\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Dans le cas des coordonnées polaires, $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$. Soient (r_0, θ_0), (r, θ) les extrémités de l'arc à mesurer. Il vient, suivant qu'on prend θ ou r comme variable,

(3) $$s = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \int_{r_0}^{r} dr\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}.$$

338. Exemples de rectifications (coordonnées rectangulaires). — I. Chaînette. On a, dans ce cas (n° 301, V),

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \qquad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Calculons l'arc à partir du sommet A où $x = 0$, la formule (1) donne

$$s = \frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

II. Parabole. Prenons l'axe de symétrie pour axe des y et le sommet pour origine. On aura

$$x^2 = 2py, \qquad y = \frac{x^2}{2p}, \qquad 1 + y'^2 = \frac{x^2 + p^2}{p^2}.$$

Donc l'arc compté à partir du sommet, a pour mesure

$$s = \frac{1}{p}\int_0^x dx\sqrt{x^2 + p^2}.$$

En remplaçant a^2 par $-p^2$ dans l'intégrale indéfinie calculée au n° 332 à l'occasion de l'aire de l'hyperbole, il vient

$$\int dx\sqrt{x^2 + p^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2}\operatorname{Log}\left(x + \sqrt{x^2 + p^2}\right).$$

De là, la valeur de s :

$$s = \frac{x}{2p}\sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p}{2}\operatorname{Log}\frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p}.$$

III. Cycloïde. Considérons la représentation paramétrique habituelle

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

L'arc, compté à partir de l'origine où $t = 0$, a pour mesure

$$s = a\int_0^t dt\,\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2a\int_0^t \sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right).$$

339. Intégrales elliptiques de Legendre. Rectification de l'ellipse et de l'hyperbole. — L'arc de ces deux courbes s'exprime par des intégrales que l'on ne peut pas réduire aux fonctions élémentaires, mais on peut les ramener aux deux intégrales définies suivantes :

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \qquad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi d\varphi\,\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi},$$

où le paramètre k est < 1. Legendre a donné à ces intégrales le nom d'*intégrales elliptiques* de *première* et de *seconde espèce*. On a dressé des tables qui permettent de les calculer pour les diverses valeurs de φ et k.

Les intégrales sont dites *complètes* si $\varphi = \frac{\pi}{2}$; elles se désignent par

$$F_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \qquad E_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

Arc d'ellipse. Soit la représentation paramétrique

$$x = a\sin\varphi, \qquad y = b\cos\varphi.$$

L'arc BM, compté à partir du sommet B du petit axe où $\varphi = 0$, a pour mesure

$$s = d\varphi\int_0^\varphi \sqrt{x'^2 + y'^2} = \int_0^\varphi d\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

L'arc d'éllipse dépend de l'intégrale elliptique de seconde espèce. Posons, en effet, $k^2 = (a^2 - b^2) : a^2$; il vient

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = a\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi},$$

d'où $s = a\,E(k, \varphi)$.

Si $\varphi = \pi : 2$, l'intégrale est complète et l'arc égal au quart du périmètre de l'ellipse. Le périmètre total sera donc $4a\,E_1(k)$.

Arc d'hyperbole. On peut prendre comme représentation paramétrique de l'hyperbole rapportée à ses axes, le système

$$x = \frac{a}{\sin\varphi}, \qquad y = b\cot\varphi,$$

car, en éliminant φ, on retrouve l'équation classique de la courbe. L'arc AM, compté du sommet où $\varphi = \frac{\pi}{2}$ jusqu'à un point M où φ est $< \frac{\pi}{2}$, a pour mesure

$$s = \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{x'^2 + y'^2} = \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}.$$

Une intégration par parties et une décomposition donnent facilement

$$s = \cot\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} - \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2\cos\varphi + b^2}} =$$

$$\cot\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} - \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} + b^2\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}}.$$

Posons $k^2 = a^2 : (a^2 + b^2)$, d'où

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} = \frac{a}{k}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,;$$

l'arc s dépend des intégrales elliptiques par la formule

$$s = \cot\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} - \frac{a}{k}\left[E_1(k) - E(k,\varphi)\right] + \frac{kb^2}{a}\left[F_1(k) - F(k,\varphi)\right].$$

340. Exemples de rectifications en coordonnées polaires. — Spirale logarithmique : $r = ae^{m\theta}$. Prenons r comme variable indépendante ; nous aurons $m\theta = \operatorname{Log} r - \operatorname{Log} a$, d'où

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = \frac{1 + m^2}{m^2}\,dr^2,$$

$$s = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}\int_{r_0}^{r} dr = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}(r - r_0).$$

Donc *l'arc de la spirale logarithmique varie proportionnellement au rayon vecteur*. Le pôle est un point asymptotique de

la courbe, car r ne s'annule qu'en faisant tendre θ vers $-\infty$. L'arc-limite, compté de ce point, conserve néanmoins une valeur finie :

$$s = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} r.$$

II. Spirale d'Archimède : $r = a\theta$. L'arc compté à partir du pôle a pour valeur, en intégrant par rapport à r,

$$s = \int_0^r dr \sqrt{1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}} = \frac{1}{a}\int_0^r dr \sqrt{a^2 + r^2}.$$

C'est la même intégrale que celle à laquelle conduit l'évaluation de l'arc de la parabole (n° 338). De là, le théorème de Grégoire de Saint Vincent : *Les arcs de la parabole $x^2 = 2ay$ et de la spirale $r = a\theta$ ont même longueur, quand on compte le premier entre les abcisses 0 et x et le second entre les rayons $r = 0$ et $r = x$.*

III. Lemniscate : $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. Si l'on prend r comme variable indépendante, on a

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{r^2}{a^2}, \qquad \frac{d\theta}{dr} = -\frac{r}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

L'arc compté à partir du sommet, où $r = a$, a donc pour mesure

$$s = \int_r^a dr \sqrt{1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2} = a^2 \int_r^a \frac{dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

Cette intégrale se ramène à l'*intégrale elliptique de première espèce* (n° 339) en posant $r = a \cos \varphi$; il vient ainsi

$$s = a\int_0^\varphi \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^4\varphi}} = a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Donc $s = \dfrac{a}{\sqrt{2}} F\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)$.

341. Rectification des courbes gauches. Exemple. — Lorsque les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de la courbe sont considérées comme fonctions de t, la longueur de l'arc AB, compris entre les point dont les paramètres sont a et b, a pour mesure

$$s = \int_a^b dt \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Comme exemple, considérons l'intersection des deux cylindres :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad x=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

Prenons x comme variable. On tire de la première équation

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad y'=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

et de la seconde

$$z=a\,\mathrm{Log}\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}, \qquad z'=\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Comptons l'arc à partir du point où $x=a$; il viendra

$$s=\int_a^x dx\sqrt{1+y'^2+z'^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_a^x\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Exercices

I. *Epicycloïdes.* — Les équations de l'épicycloïde sont (Exercice 5, p. 367) :

$$\frac{x}{a}=(1+q)\cos q\theta-q\cos(1+q)\theta, \qquad \frac{y}{a}=(1+q)\sin q\theta-q\sin(1+q)\theta.$$

On en tire

$$\frac{ds}{a}=2q(1+q)\sin\frac{\theta}{2}.$$

L'arc compté à partir du point de rebroussement où $\theta=0$, sera

$$\frac{s}{a}=2q(1+q)\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right).$$

Toutefois, comme l'élément ds doit être positif, cette formule n'est applicable que si θ varie de 0 à 2π. Si $\theta=2\pi$, on obtient le périmètre d'une arcade entière

$$s=4aq(1+q)=\frac{4b}{a}(a+b).$$

L'arc d'épicycloïde s'exprime algébriquement en fonction du rayon vecteur r. On a, en effet,

$$r^2=x^2+y^2=(1+2q)^2-4q(1+q)\cos^2\frac{\theta}{2},$$

d'où l'on tire $\cos\frac{\theta}{2}$ et, par suite, s en fonction de r.

En changeant q en $-q$ dans les formules précédentes, on obtient des résultats oorrespondants pour l'*hypocycloïde.*

Les rectifications de la *cardioïde* (Exercice 6, p. 303) et de l'*astroïde* (Exercice 3, p. 322) sont des cas particuliers des précédentes.

2. *Cissoïde.* (Exercice 2, p. 302).

$$r = 2a(\sec\theta - \cos\theta).$$

R. L'arc compté à partir du pôle a pour valeur

$$s = 2a\int_0^\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta \sqrt{\operatorname{tg}^2\theta + 4} = 2a\int_2^{\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta+4}} \frac{t^2dt}{t^2-3}$$

Intégration facile.

3. *Courbes gauches.* — Arcs des deux courbes suivantes :

$$y = \frac{x^2}{2a},\; z = \frac{x^3}{6a^2} \qquad \text{et} \qquad x = a\sin\frac{y}{a},\; z = \frac{a}{4}\operatorname{Log}\frac{a+x}{a-x}.$$

R. L'arc compté de l'origine a pour valeur $s = x + z$ pour les deux courbes.

§ 3. Courbes continues. Courbes fermées.

342. Lignes continues. Contours fermés. — Considérons deux fonctions continues de t :

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

et faisons varier t de t_1 à T ; le point (x, y) décrit une *courbe plane continue* t_1 T.

Si le point M revient à son point de départ pour $t = T$, la courbe est *fermée.* Si x et y ne reprennent le même système de valeurs que pour les valeurs extrêmes de t, la courbe ne se coupe pas elle-même et nous dirons qu'elle forme un *contour fermé simple* ou encore qu'elle est *sans point multiple.*

La distance d'un point fixe A (ξ, η) au point M $(x\, y)$ d'une ligne continue est une fonction continue de t. Si le point A n'est pas sur la courbe, cette fonction ne s'annulera pas ; elle admettra un minimé différent de zéro qu'elle atteindra pour une certaine valeur de t et que nous appellerons la *distance du point* A *à la courbe.*

Si le point A n'est pas fixe, mais seulement assujetti à se trouver sur une courbe continue $\xi = \Phi(u)$, $\eta = \Psi(u)$, la distance des points A et M est fonction continue de t, u. Si les courbes ne se rencontrent pas, le minimé de cette distance sera différent de zéro et s'appellera la *distance des deux courbes.*

La distance maximée de deux points d'une même courbe s'appelle son *diamètre* (nº 55).

Nous nous proposons d'étudier les propriétés fondamentales des courbes fermées. Il est commode pour cela d'analyser les propriétés de ce que nous appellerons une *chaîne* de régions du plan.

343. Définition et propriétés des chaînes. — Nous appellerons *chaînon* une région du plan, d'un seul tenant (nº 72), limitée par un contour polygonal extérieur sans point multiple et éventuellement percée d'un certain nombre de vides limités par des contours de même nature que le premier.

Considérons un certain nombre de chaînons *consécutifs*, désignés par leur numéro d'ordre : (1), (2),... (n). Si deux chaînons consécutifs ont des points ou des parties communes, tandis que deux chaînons non consécutifs ne se touchent pas, ces chaînons constituent une *chaîne ouverte.* Les chaînons extrêmes (1) et (n) ne se touchent donc pas.

Mais on peut aussi supposer que (1) et (n) se touchent, les autres conditions restant les mêmes. Alors (1) et (n) deviennent aussi consécutifs, il n'y a plus de chaînons extrêmes et la *chaîne est fermée.*

Le domaine contenant tous les points d'une chaîne ouverte, que nous appellerons aussi, en abrégé, la chaîne, est donc, comme les chaînons eux-mêmes, un domaine d'un seul tenant limité par un contour polygonal extérieur unique et percé d'un certain nombre de vides.

Nous dirons, en abrégé, qu'une région du plan est *intérieure* à un chaînon ou à une chaîne ouverte si elle est enfermée dans leur contour extérieur, abstraction faite des vides.

Une chaîne sera *régulière* si un chaînon ne peut être enfermé dans un autre, ni dans un groupe de deux autres pris dans la chaîne et nécessairement consécutifs.

Théorème I. — *Si une chaîne fermée* (1), (2),... (n) *est irrégulière, elle est intérieure á une chaîne de quatre au plus de ses chaînons.*

Puisque la chaîne est irrégulière, elle contient un chaînon intérieur à un ou à deux autres. Le second cas comprenant le premier, supposons que les chaînons enveloppants soit (1), (2). Si le chaînon intérieur, (3) par exemple, est contigu au groupe, tous les suivants de (4) à ($n-1$), qui ne touchent ni à (1) ni à (2), sont enfermés avec (3). Si c'est un chaînon (k) non contigu qui est enfermé dans (1), (2), toute la chaîne (4),... ($n-1$) qui contient (k) est enfermée avec (k), pour la même raison. Toute la chaîne est donc, quoi qu'il arrive, intérieure à (n), (1), (2). (3).

Théorème II. — *Tout vide d'une chaîne ouverte est dans l'intérieur d'un groupe de deux consécutifs des chaînons.*

Montrons que le théorème, évident par une chaîne de 2 chaînons, subsiste pour une chaîne de k, s'il est vrai pour une chaîne de $k-1$.

Soit C le contour extérieur de la chaîne (1), (2),... ($k-1$). Ajoutons le chaînon (k). Celui-ci se compose d'une partie (k') interieur à C et éventuellement d'une partie extérieure (k''), qui peuvent être chacune de plusieurs tenants. L'addition de (k') ne fait que réduire des vides pour lesquels le théorème est déjà vérifié. Il ne reste plus que (k'') à considérer.

Supposons donc qu'un vide se produise entre C et la frontière de (k''). Je vais montrer qu'il est intérieur au groupe (k — 1), (k), et, à cet effet, que toute ligne L allant d'un point du vide à l'infini sans toucher (k), coupe (k — 1).

La ligne L sort du vide par une frontière sur C, dont les deux extrémités, touchant à (k), sont deux points A et B de (k — 1). La ligne L scinde au moins en deux morceaux le domaine intérieur à C qui ferme le vide de manière à séparer A de B. Donc (k — 1), qui est tout entier dans l'intérieur de (C), n'est pas tout entier dans le même morceau et il est scindé par L.

THÉORÈME III. — *Le contour extérieur unique d'une chaîne régulière ouverte touche à tous les chaînons, tandis que le contour d'un vide en touche au plus quatre.*

Les chaînons qui touchent au contour extérieur forment à eux seuls une chaîne, ouverte comme la proposée. Cette propriété subsiste si l'on découpe dans l'intérieur de la chaîne (pour en faire des vides) tous les chaînons qui ne touchent pas au bord, s'il y en a. Donc (Théor. II) tout chaînon supprimé est intérieur à deux chaînons du bord, de sorte que, s'il y en avait, la chaîne serait irrégulière. Donc le contour extérieur d'une chaîne régulière ouverte touche tous les chaînons.

Par contre un vide, étant intérieur à deux chaînons consécutifs, ne peut être bordé que par ceux-ci et leurs deux contigus, les seuls qui ne soient pas extérieurs aux deux premiers.

THÉORÈME IV. — *Dans une chaine régulière ouverte de cinq chaînons au moins, un vide ne peut toucher en même temps aux deux chaînons extrêmes.*

En effet, il toucherait alors à tous les chaînons, donc à plus de quatre, ce qui est contraire au théorème III.

Passons maintenant à l'étude d'une chaîne fermée. Cette étude est simplifiée par un artifice qui la transforme en chaîne ouverte.

Soit (1), (2),... (n) une chaîne fermée régulière, de cinq chaînons au moins. Nous commencerons par remplacer le groupe des trois premiers chaînons par un autre plus simple de même contour extérieur.

Soient C le contour extérieur du groupe (1), (2), (3) et D le domaine intérieur à C. Comme (1) et (3) ne se touchent pas et sont extérieurs l'un à l'autre (puisque la chaîne est régulière), on peut partager D par deux transversales en trois morceaux, (I), (II) et (III), le premier contenant tout (1) sans toucher à (3), le troisième tout (3) sans toucher à (1) et le second contenant le reste (*).

(*) Par exemple, on peut procéder de la manière suivante. On considère D comme partagé en morceaux par les frontières extérieures seules des chaînons (1) et (3). On attribue à (I) les morceaux qui ne touchent pas (3), à (III) ceux qui ne touchent pas (1), et le reste à (II).

Nous avons ainsi constitué une nouvelle chaîne fermée régulière (I) (II) (III) (4)... (*n*) du même nombre de chaînons que la première ; seulement (I) et (II) ne se touchent plus que le long d'une frontière commune d'un seul tenant, que nous désignerons par ses extrémités, *ab*.

Pour ouvrir cette chaîne, il suffit de considérer la transversale *ab* comme une *coupure* disjoignant (I) de (II). A cet effet, attribuons deux côtés à cette ligne l'un $a'b'$ servant de frontière à (I), l'autre $a''b''$ servant de frontière à (II) et considérons la ligne *ab* elle-même comme extérieure à la chaîne. Alors (I) et (II) sont deux chaînons extrêmes et la chaîne est ouverte.

Soit P le contour extérieur de la chaîne ouverte. Ce contour emprunte les deux frontières $a'b'$ et $a''b''$. En effet, dans le cas opposé, contrairement au théorème IV, ces frontières prises sur chacun des chaînons extrêmes borderaient un même vide, car on va de l'une à l'autre en traversant la coupure (donc sans entrer dans là chaîne).

Faisons le tour de P dans un sens déterminé (laissant, par exemple, l'intérieur à gauche). Comme $a'b'$ et $a'' b''$ sont alors parcourus en sens contraires, le circuit se compose de $a'b'$, de $a''b''$ et de deux polygones P_1 et P_2 reliant respectivement a' à a'' et b'' à b' et passant chacun par tous les chaînons intermédiaires de la chaîne (I),... (II) ; donc passant aussi chacun par tous les chaînons (1), (2),... (*n*), car *a* et *b* sont sur (2) et l'on ne passe de (III) à (4) que par (3), et de (I) à (*n*) que par (1).

Supprimons maintenant la coupure *ab*, ce qui revient à souder $a'b'$ et $a''b''$; la chaîne se ferme ainsi que P_1 et P_2, et elle est enserrée entre ces deux polygones, dont l'un sera, par conséquent, intérieur à l'autre. Nous donnerons à la couronne comprise entre eux le nom d'*anneau*.

La chaîne (I), (II),... ne diffère de (1), (2),... que par la suppression des vides du groupe (1), (2), (3). Rétablissons ces vides et appliquons, d'autre part, le théorème II à la chaîne ouverte par la coupure. Nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Une chaîne fermée régulière de cinq chaînons au moins se constitue d'un anneau, intérieur à un polygone* P_1 *et extérieur à un polygone* P_2 *contenu dans l'intérieur du premier. Outre la région qu'il entoure, cet anneau peut être percé de vides. Mais ces derniers sont chacun intérieur à un ou à deux chaînons consécutifs et en touchent quatre au plus. Au contraire, les régions intérieure et extérieure à l'anneau touchent chacune, l'une par* P_1, *l'autre par* P_2, *à tous les chaînons.*

344. Propriétés des contours fermés. — THÉORÈME I. — *Un contour fermé simple peut être enfermé dans une chaîne fermée régulière dont les chaînons sont de diamètres* (*) *aussi petits qu'on veut.*

(*) Ecart maximé de deux de ses points (nº 55).

Donnons-nous un δ positif inférieur au quart du diamètre du contour. Supposons ce contour décrit par le point x, y quand t varie de t_1 à T. Partageons le contour t_1T en *tronçons* consécutifs par les points $t_1, t_2, \dots t_n$, T, suffisamment rapprochés pour que le diamètre de chaque tronçon soit $< \delta : 2$. Soit alors δ' la plus petite des distances de deux tronçons non consécutifs. Couvrons la courbe d'un réseau à mailles rectangulaires formé par des parallèles aux axes coordonnés, suffisamment rapprochées pour que chaque maille soit de diamètre $< \delta' : 2$. Cela fait, constituons chaque *chaînon* des mailles touchées par un même tronçon et soient respectivement (1), (2),... (n) les chaînons construits sur $t_1 t_2$, $t_2 t_3, \dots t_n$ T. Ces chaînons forment une *chaîne fermée*, car deux chaînons consécutifs (t_{k-1}) et (t_k) ont en commun le point t_k. Le diamètre d'un chaînon ne surpassera pas $\delta : 2 + \delta'$ donc δ, car δ' ne peut surpasser le diamètre $\delta : 2$ d'un chaînon. Enfin cette chaîne est *régulière*, sinon elle serait intérieure à quatre chaînons et son diamètre serait $< 4\delta$, donc inférieur à celui de la courbe. Ceci est évidemment impossible puisque la courbe est contenue dans la chaîne.

Le vide entouré par l'anneau touche aux chaînons les plus écartés, il sera de diamètre supérieur à $4\delta - 2\delta$ ou 2δ. Au contraire, les vides de l'anneau lui-même sont intérieurs à deux chaînons, ils seront de diamètre $< 2\delta$. Pour construire l'anneau, il suffit donc d'hachurer toutes les mailles du réseau rencontrées par la courbe et tous les vides sauf un, celui dont le diamètre est $> 2\delta$ et qui constitue la *région intérieure* à l'anneau.

Théorème II. — *La courbe étant enfermée dans cette chaîne dont les chaînons sont de diamètre $< \delta$, tout point de la courbe est à une distance $< \delta$ de chaque bord de l'anneau et tout point de l'anneau est à une distance $< \delta$ de la courbe.*

La première proposition est immédiate puisque tout point de la courbe est dans un chaînon de diamètre $< \delta$ qui touche aux deux bords de l'anneau. D'autre part, il est non moins évident que tout point intérieur à un chaînon est à une distance $< \delta$ de la courbe. Mais je dis que c'est encore vrai pour un point p qui tombe dans une lacune de l'anneau, intérieure à deux chaînons consécutifs ($k-1$) et (k). Ceux-ci ont en commun le point t_k. Joignons t_k à p par une droite et prolongeons celle ci : elle rencontrera l'un des deux chaînons ($k-1$) ou (k) qui enferme p. Comme t_k est dans les deux, la distance $t_k p$ est inférieure au dramètre δ du chaînon recoupé.

Théorème III. — *Tout courbe fermée sans point multiple décompose le plan en deux régions, l'une intérieure et l'autre extérieure à la courbe.* (C. Jordan).

Soient p un point non situé sur la courbe, δ sa distance à la courbe. Construisons un anneau dont tous les points soient à une distance de la courbe moindre que δ ; le point p, étant exclu de l'anneau, tombera à l'intérieur ou à l'extérieur de l'anneau. Nous dirons dans le premier cas qu'il est *intérieur à la courbe*, dans le second qu'il est *extérieur*.

Cette distinction ne dépend aucunement de la manière de construire l'anneau, mais correspond à des propriétés distinctives par rapport à la courbe. En effet, si le point p n'est pas entouré par l'anneau, il est possible de tracer une ligne polygonale partant de p et s'éloignant à l'infini sans rencontrer la courbe. Cette possibilité disparaît dès que le point est entouré par l'anneau. En effet, toute ligne polygonale allant de p à l'infini doit scinder la chaîne et, par conséquent, couper un chaînon en deux, par exemple (1), entre les deux points t_1 et t_2 qui l'unissent à ses voisins. Le tronçon t_1t_2, qui est situé tout entier dans ce chaînon, passe donc d'un morceau dans l'autre et doit rencontrer la coupure.

L'ensemble des points intérieurs et l'ensemble des points extérieurs constituent respectivement les *régions intérieure* et *extérieure* à la courbe. La région intérieure ne peut pas se réduire à zéro, car on peut toujours construire un anneau. Enfin, deux points intérieurs ou deux points extérieurs peuvent toujours être réunis par une ligne polygonale qui ne rencontre pas la courbe, car on peut construire un anneau contenant ou excluant les deux points et une ligne qui les réunit sans rencontrer l'anneau.

Suivant que t varie de t_1 à T ou de T à t_1 le contour fermé est parcouru dans deux sens opposés. Nous appellerons *sens direct* celui qui laisse à gauche l'intérieur de l'anneau et nous dirons qu'il laisse à gauche l'intérieur de la courbe. L'autre sera le sens *rétrograde*.

THÉORÈME IV. — *Un contour fermé simple étant partagé en plus de deux tronçons consécutifs, on peut y inscrire un polygone fermé, sans point multiple, tel que les sommets se suivent dans le même ordre sur la courbe que sur le polygone et qu'il y ait au moins un sommet sur chaque tronçon.*

Construisons un réseau assez serré pour qu'une même maille ne puisse s'étendre sur deux tronçons non consécutifs. Comme on peut décrire toutes les parties du contour situées dans un même maille *en parcourant deux tronçons consécutifs seulement dans le sens direct*, on peut assigner, sans ambiguité, pour chaque maille m_k rencontrée par le contour, en premier point d'entrée E_k et un dernier point de sortie S_k.

L'indice 1 étant attribué arbitrairement à une première maille m_1, donnons l'indice 2 à celle où le contour pénètre au point S_1, puis l'indice 3 à celle où il pénètre au point S_2, et ainsi de suite. Considérons la suite des mailles m_1, m_2,... numérotées de la sorte. Le nombre des mailles du réseau étant limité, il y a une première maille qui se reproduira dans la série. Comme on peut recommencer le numérotage en partant de celle-là, nous supposerons que ce soit la maille m_1 et qu'elle se reproduise pour la première fois à l'indice $n+1$. Construisons le polygone $S_1S_2... S_nS_1$; ce polygone répondra à la question.

En effet, les côtés de ce polygone tombent successivement dans les mailles différentes m_2, m_3,... m_n, m_1 et ne peuvent se couper. Deux sommets consécutifs S_k et S_{k+1}, étant sur la courbe $E_{k+1}\,S_{k+1}$ se suivent

dans le sens direct sur un même tronçon ou sur deux tronçons consécutifs. Donc, en parcourant la série des sommets S_1, S_2,.., on parcourt successivement les tronçons dans le même sens, sans en sauter aucun, et, comme on revient au point de départ, on les rencontre tous.

Remarque. — Il résulte du théorème précédent qué l'on peut inscrire, autour d'un contour fermé simple, un polygone sans point multiple dont les côtés soient aussi petits qu'on veut. Il suffit pour cela de décomposer préalablement le contour en tronçons, par des valeurs assez rapprochées de t pour que l'écart de deux points situés sur deux tronçons consécutifs ne surpasse pas la limite voulue.

§ 4. Courbes rectifiables et quarrables. Intégrales curvilignes.

345. Courbes rectifiables. — Considérons une courbe continue, définie par les deux équations (*):

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Donnons à t une suite de valeurs t_1, t_2,... t_n, $t_{n+1} = \mathrm{T}$. Soient, en général, x_i y_i les valeurs de x, y pour $t = t_i$, Le périmètre p du polygone inscrit ayant ces points pour sommets, sera

$$p = \sum_1^n \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Faisons tendre vers zéro les amplitudes de tous les intervalles $(t_{i+1} - t_i)$. Si le périmètre du polygone ainsi construit tend vers une limite déterminée et unique, quel que soit le mode de subdivision de l'intervalle (t_1, T) en parties infiniment petites, l'arc correspondant de la courbe est *rectifiable* et *la longueur de l'arc* est égale à cette limite.

Pour que cette limite existe, il faut d'abord que le périmètre considéré ne croisse pas indéfiniment. Or le côté $t_i\, t_{i+1}$ est au moins égal $|\, x_{i+1} - x_i \,|$ et à $|\, y_{i+1} - y_i \,|$, mais ne peut surpasser la somme de ces quantités. Pour que le périmètre reste fini, il est donc nécessaire et suffisant que les deux sommes

$$\sum_1^n |\, x_{i+1} - x_i \,| \qquad \text{et} \qquad \sum_1^n |\, y_{i+1} - y_i \,|$$

soient bornées et, par suite, que $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soient des fonctions à variation bornée dans l'intervalle $(t_1\ \mathrm{T})$.

Cette condition nécessaire pour que l'arc soit rectifiable est aussi

---

(*) Si le point (x, y) revient sur lui-même, t continuant à varier dans le même sens, il décrit une portion de courbe qui *se superpose* à la précédente, mais que l'on considère comme *distincte.*

suffisante. En effet, supposons-la vérifiée et désignons par L la borne supérieure des périmètres de tous les polygones possibles. Nous allons montrer que le périmètre du polygone $t_1 t_2 \dots t_{n+1}$ T tend vers L quand l'amplitude de tous les intervalles tend vers zéro.

Pour établir ce théorème, il suffit d'observer que le périmètre p reste stationnaire ou augmente quand on intercale un nouveau sommet entre t_k et t_{k+1}, mais que cette augmentation, ne pouvant surpasser la somme des deux nouveaux côtés, est inférieure au double de la somme des oscillations de x et de y dans l'intervalle (t_k, t_{k+1}). Cette remarque est entièrement analogue au lemme du nº 87 sur lequel repose la démonstration du théorème I qui le suit. Donc en raisonnant dans le cas présent, sur p et L comme nous avons raisonné là pour prouver que t a pour limite T, nous en concluons que p a pour limite L. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe continue, dont les coordonnées sont des fonctions de t, soit rectifiable, est que ces fonctions soient à variation bornée (JORDAN).

L'arc d'une courbe rectifiable possède les propriétés suivantes :

1º *Si l'on partage un arc en plusieurs parties, la longueur totale est égale à la somme des longueurs de chaque partie.*

On s'en assure par la considération des polygones inscrits dans chaque partie et dont l'ensemble est inscrit dans l'arc total.

2º *La longueur s d'un arc, comptée d'un point fixe t_1 a un point mobile t, est une fonction continue et croissante de t.*

L'arc varie en croissant à cause de la propriété précédente et sa continuité se prouve comme celle de la fonction T considérée au nº 87.

3º *Donc t est, réciproquement, une fonction continue et croissante de s. Les coordonnées x et y, qui sont fonctions continues de t, peuvent donc toujours être considérées comme fonctions continues de s.*

4º *Si x et y sont des fonctions absolument continues de t, on a, avec l'intégrale de Lebesgue, en ne considérant les fonctions que là où elles existent,*

$$s = \int_{t_1}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

donc la fonction s est absolument continue aussi.

Posons, en effet,

$$\varphi_i(t) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Cette fonction est absolument continue comme x et y, car la variation de φ_i ne peut surpasser la somme de celles de x et de y (*). Donc cette fonction a pour dérivée presque partout

(*) En vertu de la formule $|\Delta\varphi_i| \leqslant \sqrt{\Delta x^2 + y^2} \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|$, qui exprime que la différence, $\Delta\varphi_i$, de deux côtés d'un triangle ne surpasse pas le troisième côté.

$$\varphi_i'(t) = \frac{(x-x_i)x' + (y-y_i)y'}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} \leqslant \sqrt{x'^2 + y'^2}\ (*).$$

On a, par conséquent (nº 265),

$$\varphi_i(t) = \int_{t_i}^{t} \varphi'(t)\,dt \leqslant \int_{t_i}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt,$$

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \varphi_i(t_{i+1}) \leqslant \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

Donc, en partageant l'intervalle (t_1, t) en éléments successifs (t_i, t_{i+1}) infiniment petits, on a

$$s = \lim \Sigma\varphi_i(t_{i+1}) \leqslant \int_{t_1}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

Cherchons maintenant une inégalité de sens contraire. Comme s est une fonction croissante de t, on a (nº 259), s' existant presque partout,

$$s \geqslant \int_{t_1}^{t} s'dx.$$

Mais on peut, sans changer cette dernière intégrale, ne considérer que les points où s', x' et y' existent à la fois et où l'on a, par conséquent,

$$s' = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \geqslant \lim \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

On a donc *a fortiori*, ce qui achève la démonstration,

$$s \geqslant \int_{t_1}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

Nous avons considéré une courbe plane, mais les conclusions s'étendent à l'espace, en introduisant une coordonnée de plus.

346. Intégrales curvilignes. — Considérons une ligne continue

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

et supposons que le point (x, y) décrive un arc L quand t croît de t_1 à T. Soit P (x, y) une fonction continue des deux variables x et y. Décomposons l'intervalle t_1T par les points $t_1, t_2, \dots t_k, \dots t_{n+1} = T$ et soit θ_i un point arbitraire de l'intervalle t_it_{i+1}. Désignons, en général, par x_i, y_i et ξ_i, η_i les valeurs de x, y aux points t_i et θ_i. Formons alors la somme

$$\sum_1^n P(\xi_i, \eta_i)(x_{i+1} - x_i).$$

(*) A cause de la relation générale $ax' + by' \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x'^2+y'^2}$.

Si cette somme tend vers une limite déterminée quand les valeurs successives de t sont infiniment voisines, c'est-à-dire quand les points successifs (x_i, y_i) se rapprochent indéfiniment les uns des autres, cette limite s'appelle l'intégrale de $\mathrm{P}dx$ prise le long de la courbe L dans le sens $t_1\mathrm{T}$, et se désigne par le symbole

$$\int_{\mathrm{L}} \mathrm{P}(x, y)\, dx.$$

Cette expression est une *intégrale curviligne*. Lorsqu'elle a un sens, on dit que la fonction $\mathrm{P}dx$ est *intégrable le long de la ligne* L.

THÉORÈME I. — *La fonction* $\mathrm{P}dx$ *est intégrable sur toute ligne continue, dont l'abscisse* $x = \varphi(t)$ *est une fonction à variation bornée, et, dans ce cas, l'intégrale effectuée sur cette ligne se ramène à des intégrales de fonctions continues, au sens ordinaire, c'est-à-dire effectuées dans un intervalle.*

Nous pouvons poser $x = u - z$, u et z désignant deux fonctions continues de t, essentiellement croissantes (nº 88) et qui varient de u_1 à U et de z_1 à Z quand t varie de t_1 à T. Mais alors t est, réciproquement, une fonction continue constamment croissante de u entre u_1 et U, et aussi une fonction continue constamment croissante de z entre z_1 et Z. Donc P, qui est fonction continue de t, peut être aussi considéré soit comme fonction continue de u, soit comme fonction continue de z. Soient u_i, z_i les valeurs de u, z au point t_i ; il viendra

$$\Sigma \mathrm{P}(\xi_i, \eta_i)(x_{i+1} - x_i) = \Sigma \mathrm{P}(u_{i+1} - u_i) - \Sigma \mathrm{P}(z_{i+1} - z_i).$$

Si l'on prend u comme variable dans la première somme du second membre, et z comme variable dans la seconde, chacune de ces deux sommes a pour limite une intégrale définie ordinaire. Passons donc à la limite dans cette équation ; nous obtenons la formule

$$\int_{\mathrm{L}} \mathrm{P}\, dx = \int_{u_1}^{\mathrm{U}} \mathrm{P}\, du - \int_{z_1}^{\mathrm{Z}} \mathrm{P}\, dz.$$

THÉORÈME II. — *Si, x est fonction absolument continue de t, on a, plus simplement, avec l'intégrale de* LEBESGUE,

$$\int_{\mathrm{L}} \mathrm{P}(x, y)\, dx = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} \mathrm{P}(x, y) x' dt.$$

On a, en effet, dans ce cas (nº 265)

$$x_{i+1} - x_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x' dt,$$

par conséquent,

$$\Sigma \mathrm{P}(\xi_i, \eta_i)(x_{i+1} - x_i) - \int_{t_1}^{\mathrm{T}} \mathrm{P}(x, y)\, x'\, dt = \Sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\mathrm{P}(\xi_i, \eta_i) - \mathrm{P}(x, y)] x' dt\,;$$

et il suffit de montrer que cette expression tend vers zéro avec les intervalles (t_i, t_{i+1}). Or on peut supposer ceux-ci assez petits pour que

$P(\xi_i, \eta_i) - P(x, y)$ soit $< \varepsilon$ en valeur absolue quel que soit i. Alors l'expression précédente est moindre en valeur absolue que la quantité, infiniment petite avec ε,

$$\Sigma\varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} | x' | \, dt = \varepsilon \int_{t_1}^{T} | x' | \, dt.$$

REMARQUE. — L'intégrale curviligne $\int Q dy$ se définit d'une manière semblable à celle de $P dx$. L'intégrale plus générale,

$$\int_L (P dx + Q dy),$$

est, par définition, la somme des deux précédentes ; elle sera donc bien déterminée si les fonctions x et y sont à variation bornée, c'est-à-dire *si la ligne d'intégration est rectifiable.*

347. Coutours fermés quarrables. — Considérons un contour fermé simple C et soit A la région intérieure à C.

I. *On dit que la région* A *(ou que la courbe* C*) est quarrable si la borne supérieure des aires polygonales intérieures à* A *coïncide avec la borne inférieure des aires polygonales contenant* A. *Ces aires peuvent être limitées par un ou plusieurs contours distincts. Cette borne commune est l'aire de* A.

Pour que la courbe soit quarrable, il faut et il suffit que, quelque petit que soit ε, on puisse trouver un domaine polygonal P contenu dans A et un domaine polygonal P' contenant A, tels que $P' - P$ soit $< \varepsilon$. On peut toujours supposer que les contours de P et P' ne rencontrent pas la courbe, car il suffit d'une modification aussi petite qu'on veut pour réaliser cette condition.

Donc, *si la courbe est quarrable, elle peut être enfermée (au sens étroit) dans un domaine polygonal* $(P' - P)$ *d'aire plus petite que* ε.

Soit alors δ la plus petite distance de la courbe C à P et P'. Tout anneau (nº 344) dont les points seront à une distance $< \delta$ de la courbe sera tout entier dans le domaine extérieur à P et intérieur à P' et son aire sera $< \varepsilon$. Donc :

II. *Si la courbe* C *est quarrable, elle peut être enfermée dans un anneau d'aire infiniment petite.*

Cette condition est aussi suffisante pour que la courbe soit quarrable, puisque l'aire A est intermédiaire entre celles des deux contours polygonaux qui bordent l'anneau.

Couvrons maintenant la courbe C d'un réseau dont les mailles tendent vers 0, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

III. *La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe* C *soit quarrable, est que la somme des mailles rencontrées par la courbe ait pour limite* 0.

Cette condition est suffisante, car les mailles intérieures à A forment une aire polygonale P contenue dans A, et, en ajoutant les mailles rencontrées par la courbe, on a une aire polygonale P′ contenant A, telles que $P' - P$ tende vers zéro. Cette condition est nécessaire, puisque les mailles rencontrées par la courbe font toujours partie de l'anneau qui correspond au réseau.

IV. *Le contour fermé simple $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, sera quarrable si x ou y est à variation bornée.*

Soit t_1T l'intervalle dans lequel t décrit la courbe. Décomposons-le par les points $t_1, t_2 \ldots t_{n+1} = T$. Soient ε_i et η_i les oscillations de x et y dans l'intervalle $t_i\, t_{i+1}$. Le tronçon $t_i\, t_{i+1}$ de la courbe peut être inscrit dans un rectangle de côtés ε_i et η_i. Par conséquent, quand les mailles tendront vers zéro, la somme de celles qui rencontrent ce tronçon aura une limite égale ou inférieure au produit $\varepsilon_i\eta_i$ qui mesure ce rectangle. La somme des mailles qui rencontrent le contour proposé a donc une limite inférieure à $\Sigma\varepsilon_i\eta_i$. Si x, par exemple, est à variation bornée, x est la différence de deux fonctions non décroissantes, u et z, qui varient de u_1 à U et de z_1 à Z dans l'intervalle t_1T. Soit η la plus grande des quantités η_i. On aura

$$\Sigma\, \varepsilon_i\, \eta_i < \eta\Sigma\varepsilon_i < \eta\, [U - u_1 + Z - z_1].$$

La somme des mailles rencontrées par la courbe a donc une limite inférieure à cette dernière quantité. Celle-ci peut être rendue plus petite que toute quantité donnée, car η est aussi petit qu'on veut avec les intervalles des valeurs de t. Donc la somme des mailles rencontrées par la courbe a pour limite zéro.

En particulier, *toute courbe fermée rectifiable sera quarrable*, puisque ses coordonnées sont à variation bornée.

V. *L'aire intérieure à un contour fermé simple et quarrable* C *peut s'exprimer par l'une des trois intégrales curvilignes suivantes :*

$$\int_{(C)} xdy, \quad -\int_{(C)} ydx, \quad \tfrac{1}{2}\int_{(C)} (xdy - ydx),$$

effectuée sur le contour C *dans le sens direct, pourvu toutefois que cette intégrale soit déterminée. Cette condition sera d'ailleurs remplie pour la première si y est une fonction de t à variation bornée, pour la seconde si x est à variation bornée, et pour toutes les trois si la courbe est rectifiable.*

Considérons d'abord la seconde des intégrales proposées.

Construisons un *anneau* (nº 344) dont tous les points soient à une distance de la courbe moindre que ε. Inscrivons ensuite, tout autour de la courbe C, un polygone, sans point multiple, dont tous les côtés soient assez petits pour ne pas sortir de l'anneau (nº 344). La courbe et le polygone étant tous deux sur l'anneau, la différence des aires intérieures à l'un et à l'autre sera plus petite que celle de l'anneau et

comme on peut faire tendre cette dernière vers zéro, puisque la courbe est quarrable, l'aire intérieure au contour sera la limite de l'aire intérieure au polygone inscrit.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2),... les sommets consécutifs du polygone. L'aire S' du polygone se mesure par l'intégrale de ydx effectuée dans le sens rétrograde sur le contour polygonal (nº 335), ce qui revient à faire la quadrature d'une somme de trapèzes. Il vient ainsi

$$S' = \frac{1}{2}\Sigma(y_{k+1} + y_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Quand les sommets consécutifs se rapprochent indéfiniment, chacune des deux sommes $\Sigma y_{k+1}(x_{k+1} - x_k)$ et $\Sigma y_k(x_{k+1} - x_k)$ a pour limite l'intégrale existante de ydx effectuée dans le sens rétrograde sur le contour C. Donc la seconde intégrale proposée dans le théorème mesure l'aire intérieure au contour.

On prouve de même que cette aire s'exprime par la première intégrale si celle-ci a un sens. Enfin, si elle s'exprime par les deux premières intégrales, elle s'exprime aussi par leur demi-somme, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Si enfin x ou y ou bien x et y sont des fonctions absolument continues de t, on peut prendre t comme variable d'intégration, et l'aire s'exprime par l'une des intégrales (346, II) :

$$\int_{t_0}^{T} xy'dt, \qquad -\int_{t_0}^{T} yx'dt, \qquad \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}(xy' - yx')dt.$$

§ 5. Volume d'un solide. Aire d'une surface de révolution.

348. Volumes qui dépendent d'une quadrature. — La définition des volumes se rattache à la théorie des intégrales multiples et sera exposée dans le second volume. Nous n'étudions ici qu'un cas particulier. Considérons une surface dont les sections parallèles à un plan fixe soient des courbes fermées, et supposons que l'aire d'une section soit une fonction continue, $\varphi(x)$, de la distance x du plan sécant au plan fixe. Limitons un solide à l'intérieur de la surface, en menant deux plans sécants extrêmes aux distances x_1 et X du plan fixe.

Pour définir le volume du solide compris entre la surface et ces deux plans, décomposons ce solide en tranches par les plans consécutifs $x_1, x_2, \ldots x_n$. $x_{n+1} = X$. Substituons à chacune des tranches, un cylindre ayant même base $\varphi(x_k)$ et même hauteur

$(x_{k+1} - x_k)$ et faisons la somme de tous ces cylindres. Cette somme sera

$$\sum_1^n \varphi(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Faisons décroître d'une manière quelconque l'épaisseur de toutes les tranches, la somme précédente aura une limite déterminée, toujours la même, que l'on appelle le *volume du solide.* Cette limite est, en effet, par définition, l'intégrale définie

$$\int_{x_1}^{X} \varphi(x)\,dx.$$

Cette formule donne le volume compris entre les plans x_1 et X. Si l'on veut calculer le volume V compris entre les plans x_0 et x, il faudra se servir de la formule

$$(1) \qquad V = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx.$$

Quand la fonction $\varphi(x)$ est connue, cette formule ramène à une simple intégration la détermination du volume V.

349. Exemples. — I. *Ellipsoïde* : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Cherchons le volume compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x. La section par un plan x quelconque est une ellipse dont les demi-axes ont pour expressions

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Donc, d'après la valeur connue de l'aire de l'ellipse (n° 332), nous aurons

$$\varphi(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Le volume compris entre les plans 0 et x sera

$$V = \pi bc \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right).$$

Si $x = a$, on obtient la moitié du volume de l'ellipsoïde ; le volume total sera donc $\frac{4}{3}\pi abc$. Ce volume vaut les $\frac{2}{3}$ du cylindre qui a une des sections axiales de l'ellipsoïde pour base et l'axe normal à cette section pour hauteur, cylindre qui peut être circonscrit à l'ellipsoïde.

II. *Paraboloïde elliptique* : $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2x$. La section faite par le plan x est une ellipse, dont les demi-axes sont $b\sqrt{2x}$ et $c\sqrt{2x}$, et l'aire $2\pi bcx$. Le volume du segment détaché du paraboloïde par un plan x normal à l'axe, est donc

$$V = 2\pi bc\int_0^x xdx = \pi bcx^2,$$

C'est la moitié de celui du cylindre qui a même base et même hauteur que le segment du paraboloïde.

350. Solides de révolution. — L'aire qui a été désignée par $\varphi(x)$ s'obtient immédiatement dans le cas très étendu des solides de révolution autour de l'axe des x. Soient $f(x)$ une fonction continue et $y = f(x)$ l'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires. En tournant autour de l'axe OX, cette courbe engendre une surface de révolution. La section faite par le plan x est un cercle de rayon y. Donc $\varphi(x) = \pi y^2$. Le volume V du segment compris entre les plans x_0 et x, sera donné par la formule

$$V = \pi\int_{x_0}^x y^2dx = \pi\int_{x_0}^x f(x)^2dx. \tag{2}$$

Cette formule s'applique aussi aux cas où la courbe est définie par une représentation paramétrique ou par son équation en coordonnées polaires. Il suffit d'exprimer y^2dx en fonction de t ou en fonction de θ et de donner comme limites à l'intégrale les valeurs limites de t ou de θ.

L'aire qui engendre le volume de révolution peut aussi être comprise entre deux courbes :

$$y_1 = f_1(x), \qquad y_2 = f_2(x), \qquad (y_1 < y_2).$$

Dans ce cas, le volume de révolution est la différence des volumes engendrés par les deux courbes. On a donc

$$V = \pi\int_{x_0}^x (y_2^2 - y_1^2)\, dx. \tag{3}$$

Plus généralement, on peut chercher le volume engendré par la révolution de l'aire intérieure à une courbe fermée C, entièrement située au-dessus de OX. Supposons que le contour C puisse se décomposer en un nombre limité d'arcs sur lesquels x

varie toujours dans le même sens. En raisonnant comme au nº 335, on verra que le volume de révolution s'exprime par l'intégrale curviligne

$$\text{(4)} \qquad V = -\pi\int_{(C)} y^2 dx,$$

le contour C étant parcouru dans le sens direct (*).

351. Exemples de volumes de révolution. — I. *Cycloïde.* Supposons que la révolution se fasse autour de la base ; on aura

$$y^2 dx = a^3 (1 - \cos t)^3\, dt.$$

Le volume engendré par l'arc compris entre l'origine et le point qui a pour paramètre t, sera

$$V = \pi a^3 \int_0^t (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt$$
$$= \pi a^3 \left(\frac{5t}{2} - 4\sin t + \frac{3}{2}\sin t\cos t + \frac{\sin^3 t}{3}\right).$$

Si $t = 2\pi$, on obtient le volume $5\pi^2 a^3$ engendré par l'arcade entière.

II. *Tore.* Le tore est engendré par la révolution d'un cercle autour d'une droite. Considérons le cercle

$$x^2 + (y - c)^2 = a^2,$$

dont l'équation donne deux valeurs pour y, à savoir

$$y_1 = c - \sqrt{a^2 - x^2} \qquad y_2 = c + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

On en tire

$$y_2^2 - y_1^2 = 4c\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Faisons tourner le cercle autour de l'axe de x, le volume de la tranche du tore comprise entre les plans 0 et x s'évalue par la formule (3). Il vient

$$V = 4\pi c \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\pi c \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}\right].$$

(*) On peut généraliser ce résultat. En raisonnant comme au nº 347, on montre que l'équation (4) subsiste, pourvu que le contour C soit quarrable et que l'intégrale curviligne ait un sens. Ceci aura lieu si le contour C, défini par $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, est rectifiable et, plus généralement, si x seul est à variation bornée.

Si $x = a$, on obtient la moitié du volume du tore. Le volume total sera donc $2\pi^2 ca^2$.

252. Aire d'une surface de révolution. — Considérons encore la surface engendrée par la révolution d'une courbe *rectifiable* quelconque autour de l'axe des x. Supposons seulement que l'ordonnée de la courbe soit positive. Prenons comme variable l'arc s de la courbe compté à partir d'une origine fixe. Les coordonnées x et y d'un point de la courbe seront des fonctions continues de s.

L'aire de la surface engendrée par la portion de la courbe comprise entre deux points extrêmes, est, par définition, *la limite de l'aire engendrée par la révolution d'un polygone inscrit dont tous les côtés tendent vers zéro* (*).

Soient s_1 et S les valeurs de s aux points extrêmes ; marquons sur la courbe une suite de points où s prend les valeurs successives $s_1, s_2 \ldots, s_n, s_{n+1} = S$. Soient x_i et y_i les valeurs de x et y quand $s = s_i$. Inscrivons un polygone ayant ces points pour sommets et soit c_i le côté qui joint (x_i, y_i) à (x_{i+1}, y_{i+1}). Ce côté engendre en tournant la surface latérale d'un tronc de cône, laquelle a pour mesure, d'après la géométrie élémentaire,

$$2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} c_i.$$

L'aire engendrée par le polygone entier s'obtient en sommant toutes les expressions semblables à la précédente, ce qui peut, en introduisant des termes qui se détruisent, s'écrire comme il suit :

$$2\pi \sum_1^n \frac{y_i + y_{i+1}}{2}(s_{i+1} - s_i) - 2\pi \sum_1^n \frac{y_1 + y_{i+1}}{2}\left[(s_{i+1} - s_i) - c_i \right].$$

Considérons d'abord la seconde somme. Comme c_i est la corde de l'arc $s_{i+1} - s_i$, toutes les différences entre crochets sont positives. Donc, M désignant le maximé de y, cette seconde somme est moindre que

$$2\pi \mathrm{M} \sum_1^n [(s_{i+1} - s_i) - c_i] = 2\pi \mathrm{M}[\mathrm{S} - s_1 - \sum_1^n c_i].$$

(*) La définition de l'aire d'une surface quelconque sera donnée dans le second volume.

Comme l'arc $S - s_1$ est, par définition, la limite du périmètre Σc_i, cette expression tend vers 0 avec les côtés c_i. L'aire de la surface de révolution est donc égale à la limite de la première somme. Mais la demi-somme de y_i et y_{i+1} étant une valeur moyenne de y dans l'intervalle (s_i, s_{i+1}) de s, la première somme tend, par définition, vers une intégrale définie quand tous ces intervalles tendent vers zéro ; et l'on obtient, pour l'aire A de la surface, la formule

$$A = 2\pi \int_{s_1}^{S} y \, ds. \tag{5}$$

Cette formule suppose l'arc rectifiable. On peut en déduire d'autres, applicables aux divers cas dans lesquels s n'est pas la variable indépendante. Celles-ci se déduisent de la précédente par un changement de variable, mais il faut des hypothèses plus restrictives.

Suivant que la courbe sera définie par une représentation paramétrique, par l'équation $y = f(x)$, ou en coordonnées polaires, on aura, *pourvu que les dérivées représentées par x', y' et r' existent et soient continues,*

$$ds = dt\sqrt{x'^2 + y'^2} = dx\sqrt{1 + y'^2} = d\theta\sqrt{r^2 + r'^2}.$$

Prenant t, x ou θ comme variable, on transformera donc, suivant le cas, la valeur (5) de A dans l'une des suivantes ;

$$2\pi\int_{t_0}^{t} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt, \quad 2\pi\int_{x_0}^{x} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad 2\pi\int_{\theta_0}^{\theta}(r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta,$$

les limites se rapportant aux extrémités de l'arc. Ce sont ces formules que l'on applique en pratique.

353. Aire de l'ellipsoïde de révolution. — Nous prendrons pour variable l'angle φ déjà considéré au n° 339. On a alors

$$x = a\sin\varphi, \qquad y = b\cos\varphi, \qquad ds = d\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Il y deux cas à distinguer suivant que l'ellipsoïde est de révolution autour du grand axe ou du petit.

1° *Ellipsoïde surhaussé* $(a > b)$. Soit $\varepsilon = (\sqrt{a^2 - b^2}) : a$ l'excentricité absolue. Pour obtenir l'aire totale de l'ellipsoïde, il faut doubler l'aire engendrée par l'arc ayant pour extrémités $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi : 2$. On aura, par la relation $\varepsilon \sin\varphi = \sin t$,

$$S = 4\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{4\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{\text{arc sin } \varepsilon} \cos^2 t dt,$$

$$S = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \Big[t + \sin t \cos t \Big]_0^{\text{arc sin } \varepsilon} = 2\pi ab \left[\frac{\text{arc sin } \varepsilon}{\varepsilon} + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right].$$

Ce résultat se simplifie par la relation $\sqrt{1 - \varepsilon^2} = b : a$; il vient

$$S = 2\pi \left[b^2 + ab \frac{\text{arc sin } \varepsilon}{\varepsilon} \right].$$

2° *Ellipsoïde surbaissé* ($a < b$). Soit $k = (\sqrt{b^2 - a^2}) : a$; on aura

$$S = 4\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \varphi} \cos\varphi \, d\varphi = 4\pi abk \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{k^2} + t^2} \, dt.$$

Cette intégrale a été calculée au n° 338 ; il vient

$$S = 2\pi ab \left[\sqrt{1 + k^2} + \frac{1}{k} \text{Log} (k + \sqrt{1 + k^2}) \right]$$

et, par relation $\sqrt{1 + k^2} = b : a$,

$$S = 2\pi \left[b^2 + \frac{ab}{k} \text{Log} (k + \sqrt{1 + k^2}) \right].$$

Ces deux expressions donnent à la limite l'aire de la sphère en faisant tendre b vers a et, par conséquent, ε et k vers zéro. On trouve la valeur connue $4\pi a^2$.

EXERCICES.

1. Calculer les volumes et les surfaces engendrées par les révolutions :
 1° d'une chainette autour de sa base ;
 2° d'une spirale logarithmique autour de l'axe polaire ;
 3° de la cardioïde : $r = 2a (1 - \cos \theta)$ autour du même axe ;
 4° de lemniscate : $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ autour du même axe.

Ces problèmes conduisent à des intégrales qui s'effectuent facilement sous forme finie.

2. Volumes engendrés par les révolutions :
 1° d'une spirale d'Archimède autour de l'axe polaire ;
 2° d'une cissoïde autour de son asymptote.

Ces volumes se calculent également sous forme finie.

§ 5. Calcul des intégrales définies par approximation.

354. Principe de la méthode. — Un grand nombre de problèmes relatifs à la mécanique, à la physique et à l'art de l'ingénieur

conduisent à des intégrales définies qu'il est impossible d'obtenir rigoureusement sous forme finie. Pour les calculer, il faut recourir aux formules d'approximation. Celles-ci sont d'autant plus avantageuses qu'elles exigent moins de calculs et comportent une exactitude plus grande. Il en existe un grand nombre. Nous allons faire connaître seulement les plus utiles et les plus élémentaires.

L'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$, où nous supposerons $f(x)$ positif et $b > a$, représente, comme on l'a vu, l'aire S limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe OX et les deux droites $x = a$ et $x = b$. Le problème d'évaluer cette aire est donc le même que celui de calculer l'intégrale ; et réciproquement, toute détermination approchée de l'aire S fournira une valeur approximative de l'intégrale.

355. Détermination de limites supérieures et inférieures d'une intégrale définie. — Nous supposerons que, dans tout l'intervalle (a, b) de l'intégration, la courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité dans le même sens. Si cette condition n'était pas réalisée, il faudrait commencer par décomposer l'aire en plusieurs autres pour lesquelles la condition aurait lieu.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que *la courbe tourne sa concavité vers le bas*. Dans l'hypothèse inverse, l'ordre des limites que nous allons obtenir serait interverti. Une limite supérieure deviendrait une limite inférieure et réciproquement.

Ceci posé, on peut, d'après M. Mansion, procéder comme il suit pour enfermer l'intégrale entre des limites que l'on sait évaluer :

On décompose l'intervalle (a, b) en un nombre pair $2n$ de parties égales d'amplitude $h = (b - a) : 2n$ par les points $x_1 = a$, x_2, x_3,... $x_{2n+1} = b$; puis on décompose l'aire S à évaluer en segments consécutifs σ_1, σ_2,... σ_{2n} (fig. 11) en menant toutes les ordonnées correspondantes y_1, y_2,... y_{2n+1}.

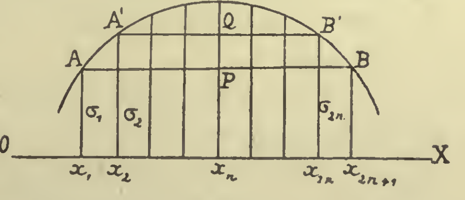


Fig. 11.

La courbe tournant par hypothèse sa concavité vers le bas, tout segment compris entre deux ordonnées quelconques y_i et

y_k surpasse le trapèze que l'on y inscrit en joignant les sommets des deux ordonnées.

On trouve ainsi, pour le segment σ_k compris entre les ordonnées y_k et y_{k+1}, l'inégalité

$$(1) \qquad \sigma_k > \frac{h}{2}(y_k + y_{k+1}).$$

De même, pour le segment $\sigma_{2i} + \sigma_{2i+1}$ compris entre les ordonnées y_{2i} et y_{2i+2},

$$(2) \qquad \sigma_{2i} + \sigma_{2i+1} > h\,(y_{2i} + y_{2i+2}).$$

Mais on peut aussi assigner une limite supérieure aux segments. Tout segment compris entre deux ordonnées verticales est moindre que le trapèze qu'on lui circonscrit en menant à la courbe, entre ces ordonnées prolongées, une tangente intermédiaire quelconque. En particulier, le segment $\sigma_{2i-1} + \sigma_{2i}$ compris entre les ordonnées y_{2i-1} et y_{2i+1} est moindre que le trapèze qu'on lui circonscrit en menant la tangente au sommet de l'ordonnée médiane y_{2i}. Ce trapèze a pour mesure sa hauteur $2h$ multipliée par la moyenne y_{2i} de ses bases. On a donc

$$(3) \qquad \sigma_{2i-1} + \sigma_{2i} < 2h\,y_{2i}.$$

De là résultent facilement diverses limites supérieures et inférieures pour l'aire totale S. Pour les écrire plus facilement, désignons par :

P la somme des ordonnées paires $y_2 + y_4 + \dots + y_{2n}$;

I celle des ordonnées impaires $y_1 + y_3 + \dots + y_{2n+1}$;

E_1 celle des ordonnées impaires extrêmes $y_1 + y_{2n+1}$;

E_2 celle des ordonnées paires extrêmes $y_2 + y_{2n}$.

On obtient d'abord une *limite supérieure* L par la formule (3). On a, en effet,

$$S = \sum_1^n (\sigma_{2i-1} + \sigma_{2i}) < 2hP$$

Par conséquent,

$$(4) \qquad S < L = 2hP.$$

On obtient ensuite une *première limite inférieure l* par la formule (1), car on a

$$S = \sum_1^{2n} \sigma_k > \frac{h}{2}(2P + 2I - E_1)\,;$$

par conséquent,

$$(5) \qquad S > l = h\left(P + I - \frac{E_1}{2}\right).$$

Cette formule donne une valeur approchée l de S ; on l'appelle *la formule des trapèzes.*

Enfin on peut obtenir une *seconde limite inférieure* l' en combinant les formules (1) et (2). On a, en effet,

$$S = \sigma_1 + \sigma_{2n} + \sum_{1}^{n-1} (\sigma_{1i} + \sigma_{2i+1}).$$

On remplace σ_1 et σ_{2n} par leurs limites (1) et les parenthèses par leurs limites (2), ce qui donne

$$S > h\frac{E_1 + E_2}{2} + h(2P - E_2)$$

et, en réduisant,

$$(6) \qquad S > l' = h\left[2P - \frac{E_2 - E_1}{2}\right].$$

Cette dernière limite a l'avantage de ne pas faire intervenir les ordonnées intermédiaires d'ordre impair. Quand on se sert des limites (4) et (6), on peut donc se dispenser de calculer ces ordonnées.

356. Formules de Poncelet et de Simpson. — Ces formules s'obtiennent par la combinaison des limites précédentes :

1° *La formule de Poncelet* s'obtient en donnant comme valeur à S la moyenne arithmétique des valeurs L et l'. On trouve ainsi

$$(7) \qquad S = \frac{L + l'}{2} = h\left[2P - \frac{E_2 - E_1}{4}\right].$$

L'erreur commise sera moindre en valeur absolue que

$$\frac{L - l'}{2} = \frac{h}{2}\frac{E_2 - E_1}{2},$$

mais on en ignore le sens.

Cette limite de l'erreur peut se présenter géométriquement. En effet, si l'on joint (fig. 11) les sommets A et B des ordonnées extrêmes y_1 et y_{2n+1} et les sommets A' et B' des ordonnées extrêmes de rang pair y_2 et y_{2n}, ces deux droites AB et A'B' interceptent sur l'ordonnée du milieu y_n un segment PQ qui est précisément égal à $(E_2 - E_1) : 2$, L'erreur est donc moindre que la moitié du rectangle construit sur ce segment PQ et la distance h de deux ordonnées consécutives.

La formule de Poncelet est très suffisamment exacte et elle

est surtout pratique à cause de sa simplicité. Elle ne nécessite pas le calcul des ordonnées intermédiaires de rang impair.

2° *La formule de Simpson* s'obtient en faisant

$$(8) \qquad S = \frac{L + 2l}{3} = \frac{h}{3}(4P + 2I - E_1).$$

La formule de Simpson se montre presque toujours pratiquement la plus exacte. Mais les principes qui nous ont servi jusqu'ici ne suffisent pas pour justifier théoriquement de sa supériorité. Tout ce que nous voyons pour le moment, c'est que l'erreur ne peut surpasser

$$L - \frac{L + 2l}{3} = \frac{2}{3}(L - l).$$

Pour justifier de la supériorité de la formule de Simpson, nous allons chercher par une autre voie une expression analytique de l'erreur commise. Cette expression pourra servir en pratique chaque fois que la dérivée quatrième de $f(x)$ sera connue. Dans les autres cas, la formule de Poncelet sera préférable à celle de Simpson, car elle donnera un résultat aussi sûr avec moins de calculs.

357. Reste de la formule de Simpson. — Nous appellerons *reste* de la formule de Simpson, la différence entre la vraie valeur de l'intégrale et celle que donne la formule de Simpson. Nous allons donc chercher une expression commode de ce reste.

Nous pouvons nous affranchir de toutes les conditions que nous avons imposées à la fonction $f(x)$ dans les numéros précédents. Par contre, nous devons en introduire une nouvelle : nous supposerons que les dérivées de $f(x)$ sont déterminées et continues jusqu'au quatrième ordre inclus.

Nous commencerons par former l'expression du reste dans le cas où le calcul se fait avec deux subdivisions seulement. Il n'y a alors qu'un seul point de subdivision de l'intervalle d'intégration, nous le désignerons par x et les valeurs extrêmes seront $x - h$, et $x + h$.

Soit $F(x)$ une intégrale de $f(x)$. La valeur exacte de l'aire cherchée sera

$$F(x + h) - F(x - h),$$

et celle fournie par la formule de Simpson

$$\frac{h}{3}[f(x + h) + f(x - h) + 4f(x)].$$

Considérons x comme donné et h comme variable ; les deux expressions précédentes seront fonctions de h et leur différence, ou le *reste* de la formule, pourra se désigner par $\varphi(h)$. Il vient ainsi

$$\varphi(h) = \mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x-h) - \frac{h}{3}[f(x+h) + f(x-h) + 4f(x)].$$

Comme le montre un calcul simple, cette fonction s'annule ainsi que ses dérivées premières et secondes pour $h = 0$ et la dérivée troisième a pour expression

$$\varphi'''(h) = -\frac{h}{3}[f'''(x+h) - f'''(x-h)].$$

Désignons par ξ une quantité inconnue mais comprise entre $x-h$ et $x+h$; le théorème des accroissements finis donne

$$\varphi'''(h) = -\frac{2h^2}{3} f^{\mathrm{IV}}(\xi).$$

Multiplions successivement par dh et intégrons trois fois de suite les deux membres de cette équation entre 0 et h. On peut chaque fois, en vertu du théorème de la moyenne, et sans qu'il faille changer le sens général de ξ, faire sortir le facteur $f^{\mathrm{IV}}(\xi)$ du signe $\int$ et n'intégrer que la puissance de h. On trouve ainsi, puisque φ, φ' et φ'' sont nuls pour $h = 0$,

$$\varphi(h) = -\frac{4}{3} f^{\mathrm{IV}}(\xi) \frac{h^5}{5!}$$

Telle est l'expression simple et remarquable de l'erreur commise quand on applique la formule de Simpson avec deux subdivisions seulement. Si la courbe est une parabole du second ou du troisième degré, la dérivée 4° de $f(x)$ est identiquement nulle et la *formule de Simpson* donne un résultat exact.

Revenons maintenant au cas général, envisagé au n° précédent, dans lequel il y a un nombre pair $2n$ de subdivisions. Considérons le segment $\sigma_{2i-1} + \sigma_{2i}$ de la courbe (n° 354) compris entre les ordonnées y_{2i-1} et y_{2i+1}. On peut le calculer par la formule que nous venons d'établir. Il vient ainsi

$$\sigma_{2i-1} + \sigma_{2i} = \frac{h}{3}[y_{2i-1} + y_{2i+1} + 4y_{2i}] - \frac{4}{3} f^{\mathrm{IV}}(\xi) \frac{h^5}{5!}$$

où ξ est intermédiaire entre x_{2i-1} et x_{2i+1}.

Faisons la somme des résultats précédents pour tous les indi-

ces $i = 1, 2, \ldots n$; il viendra, ξ étant maintenant compris entre a et b,

$$S = \frac{h}{3}[2I + 4P - E_1] - n\frac{4}{3} f^{IV}(\xi) \frac{h^5}{5!},$$

ou, comme $2nh = b - a$,

$$(9) \qquad S = \frac{h}{3}[2I + 4P - E_1] - \frac{h^4}{180}(b - a) f^{IV}(\xi)$$
$$(a < \xi < b).$$

Cette formule coïncide avec la formule (8), à part le dernier terme. C'est la formule de Simpson complétée par l'expression du reste. Cette expression permet donc d'évaluer une limite de l'erreur commise par la formule primitive. Si la dérivée quatrième ne change pas de signe, le sens de l'erreur sera connu, puisqu'on connaîtra le signe du reste. Celui-ci pourra même servir à rectifier dans une certaine mesure le résultat obtenu.

Si h est très petit, l'erreur commise par la formule de Simpson sera très petite, car elle est seulement du quatrième ordre par rapport à h. C'est de là que vient la supériorité de cette formule sur les autres où l'erreur est d'un ordre de grandeur plus élevé.

CHAPITRE XI.

Des séries.

---

§ Généralités sur les séries à termes constants. Séries positives.

358. Définitions. — On appelle série une suite indéfinie de quantités, réelles ou complexes, u_1, u_2,... u_n,... formées suivant une loi déterminée et que l'on ajoute successivement les unes aux autres. Le terme u_n se nomme *le terme général* de la série. Son expression donnée en fonction de n fait connaître toute la série. Soit

$$s_n = u_1 + u_2 + ..., + u_n$$

la somme des n premiers termes de la série. Si, pour une valeur indéfiniment croissante de n, la somme s_n tend vers une limite finie et déterminée s, la série est *convergente* et s est la somme ou la valeur de la série. Si s_n ne tend vers aucune limite ou augmente indéfiniment, la série est *divergente*. Toutefois si s_n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ nous disons que la série est *infinie* et a pour somme $+\infty$ ou $-\infty$.

Lorsqu'une série est convergente, la différence,

$$s - s_n = R_n,$$

entre la somme de la série et celle des n premiers termes s'appelle le *reste* de la série à partir du $n^{ième}$ terme. Ce reste est la somme de la série suivante :

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ...,$$

qui est donc convergente (ou divergente) en même temps que la première. Ainsi, on peut toujours dans l'étude de la convergence d'une série faire abstraction d'un nombre limité de termes au début.

359. Caractère général de convergence. — Pour qu'une série

converge, il faut que les sommes successives s_1, s_2,... s_n,... tendent vers une limite déterminée. De là (nos 16 et 46) on conclut la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une série est qu'à tout nombre positif ε si petit qu'il soit, corresponde un nombre n tel que l'inégalité

$$| s_{n+p} - s_n | < \varepsilon$$

ait lieu pour tous les indices n + p supérieurs à n.

Ce théorème peut aussi se formuler comme il suit : *Pour qu'une série converge, il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$\lim_{n=\infty} (s_{n+p} - s_n) = 0,$$

p VARIANT D'UNE MANIÈRE ARBITRAIRE *quand n tend vers l'infini.*

COROLLAIRE. — Faisons $p = 1$, le théorème précédent nous donne, en particulier, la condition suivante, *toujours nécessaire,* mais non suffisante pour la convergence :

Dans toute série convergente, le terme général u_n a pour limite zéro pour n infini.

360. Convergence d'une progression géométrique. — Une des séries les plus utiles à considérer est la progression géométrique

$$a + ak + ak^2 + ... + ak^n + ...$$

Si k diffère de 1, on a ici

$$s_n = a + ak + ... + ak^{n-1} = \frac{a(1 - k^n)}{1 - k}.$$

Si $| k |$ est < 1, k^n tend vers 0 et s_n vers $a : (1 - k)$; la série *converge.*

Si $| k | \geqslant 1$, le terme général ak^n n'a pas pour limite 0, sauf si $a = 0$; donc la série *diverge,* sauf si $a = 0$, auquel cas la série est nulle.

361. Séries positives. Formation de séries divergentes et convergentes. — Lorsque tous les termes d'une série Σu_n sont positifs (ou nuls) la série est dite *positive.* La somme s_n est alors croissante (ou stationnaire) quand n augmente, de sorte qu'une série positive est *convergente* ou *infinie.*

Il est facile de donner un procédé général pour former des séries positives convergentes ou divergentes.

Désignons, en effet, par M_n un nombre qui croît constamment jusqu'à l'infini avec l'indice n et formons les deux séries *à termes positifs* :

$$(M_2 - M_1) + (M_3 - M_2) + \dots = \Sigma(M_{n+1} - M_n),$$
$$\left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2}\right) + \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_3}\right) + \dots = \Sigma\left(\frac{1}{M_n} - \frac{1}{M_{n+1}}\right).$$

La première est *divergente*, car $s_n = M_{n+1} - M_1$ augmente à l'infini avec n ; la seconde *convergente*, car $s_n = \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_{n+1}}$ converge vers $\frac{1}{M_1}$.

Par exemple, si l'on prend $M_n = \operatorname{Log} n$, on formera la série *divergente*

$$\Sigma\left[\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n\right] = \Sigma \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

si l'on prend $M_n = n^\alpha (\alpha > 0)$, on formera la série *convergente*

$$\Sigma\left[\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right].$$

362. Règles de convergence des séries positives tirées de la comparaison des séries entre elles. — I. *Soient Σu_n et Σv_n deux séries positives ; supposons qu'on ait constamment, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,*

$$u_n \leqslant v_n :$$

1° *Si Σv_n converge, Σu_n converge aussi ;* 2° *si Σu_n diverge, Σv_n diverge aussi.*

En effet, dans le premier cas, Σv_n étant fini, Σu_n l'est *a fortiori* et, par conséquent, converge ; dans le second, Σu_n étant infini, Σv_n l'est *a fortiori* et diverge.

II. *Si la série Σu_n converge, la série Σv_n obtenue en multipliant chaque terme de la précédente par des facteurs positifs et inférieurs à un nombre fixe A, converge aussi.*

En effet, la série $\Sigma A u_n$ converge, car elle a évidemment pour somme $A\Sigma u_n$, donc Σv_n (qui a ses termes moindres) converge en vertu de la règle précédente. — On prouve de même que :

Si la série Σu_n diverge, la série Σv_n obtenue en multipliant chaque terme de la précédente par des facteurs supérieurs à un nombre positif fixe A, diverge aussi.

Ces deux règles inverses renferment évidemment comme cas particulier la suivante :

III. *Si le rapport $u_n : v_n$ tend vers une limite finie et différente de zéro, les deux séries Σu_n et Σv_n sont en même temps convergentes ou en même temps divergentes.*

IV. *Soient Σu_n et Σv_n deux séries à termes positifs et différents de 0 ; supposons qu'on ait constamment, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}} \geqslant 0:$$

1° *Si la série Σv_n converge, Σu_n converge aussi ;* 2° *si Σu_n diverge, Σv_n diverge aussi.*

On a, en effet, à partir d'une valeur déterminée de n,

$$\frac{u_n}{v_n} \geqslant \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \geqslant \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} \geqslant \dots$$

Soit ρ la valeur du premier quotient ; on a, pour $m \geqslant n$,

$$u_m \leqslant \rho v_m, \qquad v_m \geqslant \frac{u_m}{\rho}.$$

Si Σv_n et, par suite, $\Sigma \rho v_n$ convergent, Σu_n converge aussi en vertu de la règle I ; si Σu_n et, par suite, $\Sigma(u_n : \rho)$ divergent, Σv_n diverge aussi en vertu de la règle I.

363. Exemples. — 1° La série dite *harmonique*

$$\Sigma \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

est *divergente* (en vertu de la règle III), car le rapport de son terme général ($1 : n$) à celui de la série divergente $\Sigma \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ (n° 361) a pour limite l'unité.

2° Au contraire, pour toute valeur positive et constante de α, la série

$$\Sigma \frac{1}{n^{1+\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{1+\alpha}} + \frac{1}{3^{1+\alpha}} + \frac{1}{4^{1+\alpha}} + \dots$$

est *convergente* (en vertu de la règle III), car le rapport de son terme général à celui de la série convergente (n° 361)

$$\Sigma \left[\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right]$$

a pour limite $1 : \alpha$. En effet, le terme général de cette dernière série peut, par la formule des accroissements finis, prendre la forme $\alpha : (n + \theta)^{1+\alpha}$.

3° La série

$$\frac{1}{3\,\text{Log}\,3} + \frac{1}{4\,\text{Log}\,4} + \frac{1}{5\,\text{Log}\,5} + \ldots = \Sigma \frac{1}{n\,\text{Log}\,n}$$

est *divergente*. En effet, formons une série divergente par le procédé du n° 361 en prenant $M_n = \text{Log}\,\text{Log}\,n$; cette série aura pour terme général $M_{n+1} - M_n$, c'est-à-dire

$$\text{Log}\,\text{Log}\,(n+1) - \text{Log}\,\text{Log}\,n = \frac{1}{(n+\theta)\,\text{Log}\,(n+\theta)},$$

par la formule des accroissements finis. Le rapport de ce terme à $1 : (n\,\text{Log}\,n)$ tend vers l'unité, donc la série $\Sigma[1 : (n\,\text{Log}\,n)]$ diverge par la règle III.

364. Critères de Cauchy. — Nous appellerons *critère de convergence ou de divergence* toute règle qui permet de décider de la convergence ou de la divergence d'une série par une propriété de son terme général, ou par une relation entre le terme général et un nombre limité de termes suivants.

Un critère est *de première espèce* s'il ne fait intervenir qu'un seul terme, *de deuxième espèce* s'il en fait intervenir deux, et ainsi de suite.

Critère de première espèce. — *La série Σu_n converge si l'expression*

$$\sqrt[n]{u_n}$$

a une limite < 1 pour n infini, ou, plus généralement, finit par rester inférieure à un nombre $k < 1$ à partir d'une valeur suffisamment grande de n. Elle diverge si cette expression ne finit pas par devenir définitivement plus petite que l'unité.

En effet, dans la première hypothèse, les termes de la série deviennent inférieurs à ceux de même rang de la progression géométrique convergente Σk^n ; donc la série converge. Dans la seconde hypothèse, le terme général u_n n'ayant pas pour limite zéro, la série diverge.

Souvent le quotient $u_{n+1} : u_n$ a une forme plus simple que u_n,

alors, le critère précédent étant cependant applicable, il est plus commode de se servir du suivant, qui est de 2[e] espèce.

Critère de deuxième espèce. — *La série Σu_n converge si le quotient*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

finit par rester inférieur à un nombre $k < 1$ à partir d'une valeur suffisamment grande de n. Elle diverge, si ce quotient devient définitivement $\geqslant 1$.

En effet, dans la première hypothèse, on a, à partir d'un indice convenable n,

$$u_{n+1} < ku_n, \qquad u_{n+2} < k^2 u_n, \ldots \qquad u_{n+p} < k^p u_n.$$

Donc les termes de la série commencée à ce terme, sont inférieurs à ceux de même rang de la progression géométrique convergente

$$u_n + ku_n + \ldots + k^p u_n + \ldots$$

et la série converge.

Dans la seconde hypothèse, u_n cesse de décroître à partir d'un certain indice et, par conséquent, n'a pas pour limite 0.

Il arrive souvent que le rapport $u_{n+1} : u_n$ tend vers une limite déterminée k quand n tend vers l'infini. La série sera convergente si k est < 1 et divergente si k est > 1. Si $k = 1$, on ne peut rien conclure et il faut recourir aux critères de deuxième espèce suivants :

365. Critères plus précis. — Règle de Raabe. *La série positive Σu_n sera convergente, si l'on peut poser, à partir d'une valeur convenable de n, k désignant une constante > 1,*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{k}{n}.$$

Au contraire, elle sera divergente si l'on a

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{n}.$$

En particulier, *la série est donc convergente ou divergente selon que l'expression $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ a une limite supérieure ou inférieure à l'unité.*

Démontrons d'abord la règle de convergence.

Soit α un nombre positif $< k$; considérons la série convergente (n° 363)

$$\Sigma v_n = \Sigma \frac{1}{n^{1+\alpha}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}.$$

On en conclut

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{k}{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}.$$

Quand n tend vers l'infini, le second membre a pour valeur principale $\frac{k-1-\alpha}{n}$ par la formule du binome, il finit donc par devenir positif, donc le premier membre aussi, ce qui prouve que la série Σu_n converge, en vertu de la règle IV du n° 362.

Quant à la règle de divergence, c'est un cas particulier de la suivante qui est plus générale :

La série Σu_n sera divergente si l'on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \operatorname{Log} n}.$$

En effet, considérons la série

$$\Sigma v_n = \Sigma \frac{1}{n \operatorname{Log}(n-1)},$$

qui est divergente comme $\Sigma(1 : n \operatorname{Log} n)$ (n° 363), car le rapport des deux termes généraux tend vers l'unité.

Pour la seconde série, on a

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(n-1)} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{\operatorname{Log} n - \operatorname{Log}(n-1)}{\operatorname{Log}(n-1)}$$

et, par conséquent, par la formule des accroissements finis, qui donne $\operatorname{Log} n - \operatorname{Log}(n-1) = 1 : (n-\theta)$,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \operatorname{Log}(n-1)}.$$

Il vient donc

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{1}{n \operatorname{Log}(n-1)} - \frac{1}{n \operatorname{Log} n} > 0;$$

donc la série Σu_n est divergente, en vertu de la règle IV du n° 362.

Remarque. Les règles précédentes permettent de décider de la convergence ou de la divergence dans presque tous les cas qui se rencontrent en pratique. En effet, le quotient $u_n : u_{n+1}$ peut généralement se développer suivant les puissances de $1 : n$. On obtient alors un développement de la forme

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\theta}{n^2}$$

où θ conserve une valeur finie.

La série sera convergente si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$, $\beta > 1$; divergente si $\alpha < 1$ ou si $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 1$.

366. Critère de Kummer. — *Soit $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, une suite de quantités positives ; si, n croissant indéfiniment, l'expression*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$$

devient définitivement supérieure à un nombre positif fixe α, la série positive Σu_n converge.

Les termes au début de la série n'important pas, nous pouvons admettre que l'expression surpasse α pour toutes les valeurs de n. Sommons alors, pour $n = 1, 2, \ldots n$, toutes les inégalités :

$$\alpha u_{n+1} < a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} ;$$

il vient

$$\alpha(u_2 + u_3 + \ldots + u_{n+1}) < a_1 u_1 - a_{n+1} u_{n+1} < a_1 u_1,$$

donc Σu_n, étant borné, converge.

Si l'on prend $a_n = n$, on obtient comme cas particulier la règle de Raabe (n° 365).

Exercices.

1. Une série positve Σu_n est convergente ou divergente suivant que l'expression

$$\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \operatorname{Log} n$$

tend pour n infini vers une limite supérieure ou inférieure à l'unité.

R. Cas particulier de la règle de Kummer ($a_n = n \operatorname{Log} n$) et de la règle IV du n° 362.

3. *Théorème de Cauchy.* — Soit $f(x)$ une fonction positive décroissante et $F(x)$ une intégrale de $f(x)$, la série $\Sigma f(n)$ converge selon que $F(x)$ est fini ou infini pour x infini positif.

R. En effet, la série qui a pour terme général $F(n+1)-F(n)$ converge ou diverge selon l'hypothèse. Par le théorème des accroissements finis, ce terme prend la forme $f(n+\theta)$; il est $> f(n+1)$ et $< f(n)$. Donc, selon l'hypothèse, $\Sigma f(n+1)$ converge *a fortiori* ou bien $\Sigma f(n)$ diverge *a fortiori*.

3. On considère une série positive divergente $u_1+u_2+\ldots$ et une fonction $f(x)$ non croissante et tendant vers zéro pour x infini positif. Soient s_n la somme des n premiers termes de la série et $F(x)$ une intégrale de la fonction. On forme les deux séries :

$$\Sigma f(s_n)u_n, \qquad \Sigma f(s_{n-1})u_n.$$

Montrer : 1° que la première converge si $F(x)$ est borné pour x infini positif ; 2° que la seconde diverge si $F(x)$ croît indéfiniment avec x ; 3° qu'elles convergent ou divergent en même temps si u_n est borné (*).

R. Démonstration analogue à celle du théorème de Cauchy pour 1° et 2°. On prouve le 3° en montrant que la différence des deux séries est bornée avec u_n.

4. Cas particuliers du théorème précédent : Si α est positif et u_n borné,

$$\Sigma\frac{u_n}{s_n} \text{ diverge}, \qquad \Sigma\frac{u_n}{s_n^{1+\alpha}} \text{ converge (Dini).}$$

5. On considère une série positive convergente $u_1+u_2+\ldots$ et une fonction $f(x)$ qui augmente à l'infini sans décroître quand x positif tend vers 0. Soient $R_n=u_{n+1}+\ldots$ le reste de la série et $F(x)$ une intégrale de $f(x)$. On forme les deux séries ;

$$\Sigma f(R_n)u_n, \qquad \Sigma f(R_{n-1})u_n.$$

La première diverge si $F(x)$ est infini pour $x=0$; la seconde converge si $F(x)$ est borné pour $x=0$ (*).

6. Cas particuliers du théorème précédent : Si α est positif,

$$\Sigma\frac{u_n}{R_n} \text{ diverge}, \qquad \Sigma\frac{u_n}{R_{n-1}{}^{1-\alpha}} \text{ converge.}$$

7. Soit M_n un nombre positif qui croît constamment avec n ; on forme l'expression

$$\frac{1}{M_n}\operatorname{Log}\frac{M_n-M_{n-1}}{u_n}.$$

Si cette expression devient définitivement supérieure à un nombre positif fixe α, la série Σu_n converge ; elle diverge au contraire si l'expression devient inférieure à un nombre négatif.

(*) Théorèmes publiés d'abord dans la première édition de ce Cours (1903). Voir aussi Denjoy, *Sur quelques propriétés des séries à termes positifs*. Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XI, 1912.

R. Dans le premier cas, on a, en effet,

$$u_n < (M_n - M_{n-1})e^{-M_n \alpha} < \int_{M_{n-1}}^{M_n} e^{-\alpha x}\,dx,$$

ce qui est le terme général d'une série convergente. Le second cas se traite d'une manière analogue.

8. Soient P_1, $P_2, \ldots$ $P_n \ldots$ des nombres positifs quelconques, la série Σu_n sera convergente si l'expression

$$\frac{\operatorname{Log}(P_n u_n)}{\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \ldots + \frac{1}{P_n}}$$

devient définitivement inférieure à un nombre négatif fixe.

Ce critère de première espèce, le plus général que l'on puisse former, n'est qu'une autre forme de la règle précédente.

9. Si u_n est constamment décroissant, la condition $\lim nu_n = 0$ est *nécessaire* pour que la série positive Σu_n soit convergente.

R. On considère l'inégalité

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} > pu_{n+p} = \frac{p}{n+p}(n+p)\,u_{n+p}$$

et l'on applique le caractère général de convergence.

10. Plus généralement, si la suite positive μ_1, $\mu_2, \ldots$, $\mu_n, \ldots$ est choisie de manière que $u_n : \mu_n$ soit non croissant et tende vers 0, la condition

$$\lim \frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}{\mu_n} u_n = 0$$

est nécessaire pour que la série positive Σu_n soit convergente.

R. En posant $\alpha_n = u_n : \mu_n$ l'expression proposée s'écrit

$$\lim \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1} u_1 + \frac{\alpha_n}{\alpha_2} u_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} u_{n-1} + u_n \right);$$

elle s'obtient donc en multipliant les termes de Σu_n par des facteurs tous < 1 et qui tendent tous vers 0, d'où le théorème.

Si l'on fait $\mu_n = n^p$ puis $\mu_n = \frac{1}{n}$, on obtient les cas particuliers suivants :

1° S'il existe un nombre positif p, indépendant de n, tel que $u_n : n^p$ soit non croissant, la condition $\lim nu_n = 0$ est encore nécessaire pour que la série soit convergente.

2° Si nu_n est non croissant, la condition, $\lim (n \log n)u_n = 0$ est nécessaire pour que la série soit convergente (Lasker) (*). Généraliser.

(*) Philos. Trans. London 196 A (1901) p. 460.

§ 2. Séries numériques quelconques. Opérations sur les séries.

367. Séries absolument convergentes. — Une série à termes réels ou complexes est *absolument convergente* si elle converge après qu'on a remplacé chaque terme par son module.

Une série Σu_n qui est absolument convergente, est convergente.

En effet, soit r_n le module de u_n ; on a

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p} | \leqslant r_{n+1} + r_{n+2} + \dots + r_{n+p}.$$

Le caractère général de convergence (n° 359) étant vérifié pour la série Σr_n, le second membre tend vers zéro pour n infini, donc le premier membre aussi, et le caractère général de convergence se vérifie pour Σu_n.

L'étude de la convergence absolue se ramène donc à celle de la convergence des séries positives.

On a, en particulier, le théorème suivant :

Une série Σu_n est absolument convergente, si, pour n suffisamment grand, ses termes deviennent égaux ou inférieurs en valeur absolue aux termes de même rang d'une série positive convergente.

368. Séries non absolument convergentes.—*Lorsqu'une série réelle n'est pas absolument convergente, les termes positifs d'une part et les termes négatifs changés de signe d'autre part, forment séparément deux séries positives divergentes.*

Soient s_n la somme des n premiers termes de la série, puis respectivement s'_n et $-s''_n$ les sommes des termes positifs et des termes négatifs qui entrent dans s_n, enfin σ_n la somme des valeurs absolues des termes de s_n ; on a

$$s_n = s'_n - s''_n, \qquad \sigma_n = s'_n + s''_n.$$

Pour n infini, s_n est fini et σ_n infini par hypothèse, donc $(\sigma_n \pm s_n)$ et, par conséquent, s'_n et s''_n sont infinis, ce qu'énonce le théorème.

369. Addition des séries. —*Soient $s = \Sigma u_n$ et $s' = \Sigma v_n$ deux séries convergentes, la série $s'' = \Sigma(u_n \pm v_n)$ obtenue par l'addition ou par la soustraction terme à terme des deux précédentes, sera convergente et aura pour somme $s \pm s'$.*

En effet, soient s_n, s'_n, s''_n les sommes des n premiers termes de chaque série ; on a $s''_n = s_n \pm s'_n$ et, à la limite, $s'' = s \pm s'$.

REMARQUE I. — *L'addition et la soustraction des deux séries s et s' peuvent aussi se faire par simple intercalation des termes de s' entre ceux de s, c'est-à-dire que*

$$s \pm s' = u_1 \pm v_1 + u_2 \pm v_2 + u_3 \pm \dots$$

En effet, la somme des n premiers termes de cette nouvelle série est s''_k ou $s''_k + u_{k+1}$ selon que $n = 2k$ ou $2k + 1$. Comme u_{k+1} tend vers zéro, cette somme a donc même limite s'' que s''_k.

REMARQUE II. — Si les deux séries s et s' sont *absolument convergentes*, il en sera encore de même pour la série $s \pm s'$ calculées par l'un des deux procédés précédents.

En effet, soient σ et σ' les séries positives obtenues en remplaçant les termes de s et de s' par leurs modules, la série $s \pm s'$ aura ses termes au plus égaux en valeur absolue à ceux de la série positive convergente $\sigma + \sigma'$.

370. Changement de l'ordre des termes. — *On peut changer l'ordre des termes d'une série Σu_n absolument convergente sans altérer la valeur de la série.*

Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on veut. Désignons par r_n le module de u_n. On peut, par hypothèse, supposer n assez grand pour qu'on ait, p restant arbitraire,

$$r_{n+1} + r_{n+2} + \dots r_{n+p} < \varepsilon.$$

Soit s_n la somme des n premiers termes de la série rangés dans l'ordre primitif et s sa limite. D'autre part, sommons successivement les termes d'une autre manière quelconque. Il arrivera un moment où la somme s'_m ainsi obtenue comprendra tous les u_n d'indice $< n$, mais avec d'autres termes d'indices $(n + \alpha)$, $(n + \beta)$... $(n + p)$. On aura

$$| s'_m - s_n | < r_{n+\alpha} + r_{n+\beta} + \dots + r_{n+p} < r_{n+1} + r_{n+2} + \dots r_{n+p} < \varepsilon.$$

Donc s'_m finit par différer aussi peu qu'on veut de s_n qui diffère lui-même aussi peu qu'on veut de s, et s'_m a pour limite s.

Le théorème précédent subsiste si la sommation se fait en partageant les termes u_n dans un nombre plus ou moins grand ou même illimité de séries partielles, que l'on ajoute successivement les unes aux autres.

Soient, en effet, S_1, S_2,... S_k,..., les sommes de chacune des séries partielles. *Celles-ci sont absolument convergentes.* Pour le montrer, remplaçons par des zéros les termes de la série totale s qui n'entrent pas dans S_k. La série modifiée demeure absolument convergente en vertu du théorème du n° 367. Comme on peut supprimer les termes nuls, elle se compose des mêmes termes que S_k et, comme l'ordre des termes est indifférent, les deux séries sont équivalentes.

Ceci posé, l'expression $s - S_1 - S_2 - \ldots - S_k$ peut, par la règle d'intercalation des termes du n° précédent, se réduire à une seule série en u_n qui sera absolument convergente en vertu de la remarque (II) du même numéro. L'ordre des termes étant arbitraire, on peut supprimer ceux qui se détruisent. On peut donc supposer k assez grand pour que cette expression ne contienne plus que des termes u d'indices $> n$. Donc, si n est choisi comme dans la démonstration précédente, le module de l'expression sera $< \varepsilon$. Faisons tendre ε vers zéro, on aura

$$s = S_1 + S_2 + \ldots + S_k + \ldots,$$

comme il fallait l'établir.

Au contraire, la somme d'une série à termes réels non absolument convergente dépend de l'ordre de ses termes. En modifiant cet ordre, on peut faire tendre la série vers le nombre que l'on veut, pourvu que les termes tendent vers 0 (Riemann).

Formons deux séries, l'une avec les termes positifs et l'autre avec les termes négatifs de la série proposée. Supposons que ces séries (*a*) et (*b*) soient

$$(a) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

$$(b) \qquad -b_1 - b_2 - b_3 - \quad - b_n - \ldots.$$

Ces deux séries sont divergentes (n° 368) et a_n ainsi que b_n ont pour limite 0 quand n tend vers l'infini.

Ceci posé, nous allons montrer qu'on peut intercaler les termes négatifs entre les termes positifs de manière à former une série ayant pour somme un nombre quelconque, par exemple un nombre positif M.

A cet effet, prenons dans la série positive le nombre de termes strictement nécessaires pour que leur somme surpasse M, ajoutons ensuite des termes négatifs jusqu'à ce que la somme

soit ramenée au-dessous de M, puis des termes positifs jusqu'à ce que la somme surpasse de nouveau M, et ainsi de suite, sans jamais prendre plus de termes qu'il ne faut. On alterne ainsi indéfiniment les termes positifs et les termes négatifs, car les deux séries sont infinies, et, par conséquent, tous les termes des deux séries seront employés. Je dis que la nouvelle série (c) ainsi formée a pour somme M.

En effet, considérons la différence $s'_m - \mathrm{M}$ entre M et la somme des m premiers termes de la série (c). Cette différence change un nombre infini de fois de signe. Si elle est positive, elle est inférieure au dernier terme a_n qui y entre, et si elle est négative, inférieure en valeur absolue au dernier terme b_n. Donc cette différence tend vers zéro, car a_n et b_n tendent vers zéro quand le nombre des termes pris dans chacune des séries (a) ou (b) augmente infiniment.

371. Multiplication des séries. — *Si les deux séries $s = \Sigma u_n$ et $s' = \Sigma u'_n$ sont absolument convergentes, la série $\Sigma u_p u'_q$ qui contient tous les produits d'un terme de la première par un terme de la seconde rangés dans un ordre quelconque, est absolument convergente et a pour somme ss'.*

Je dis d'abord que cette série est absolument convergente. En effet, soit $\Sigma r_p r'_q$ la série obtenue en remplaçant les u par leurs modules r. Sommons les N premiers termes de cette nouvelle série et soit μ le plus grand indice p ou q qui figure dans ces N termes. On aura

$$\sum_{\mathrm{N}} r_p r'_q < \sum_1^{\mu} r_p \sum_1^{\mu} r'_q,$$

car le second membre comprend tous les termes du premier et d'autres termes positifs en plus.

Mais les facteurs du second membre restent finis, par hypothèse, quel que soit μ. Donc la somme du premier membre est bornée, et, comme elle augmente avec N, elle converge. Donc la série $\Sigma u_p u'_q$ est absolument convergente.

Il en résulte facilement qu'elle a pour somme ss'. En effet, on peut, en vertu du théorème du n° précédent, additionner ses termes dans l'ordre que l'on veut. On peut donc additionner successivement tous les termes des produits $s_n s_n$, puis $s_{n+1} s'_{n+1}$, etc... et on obtient ainsi comme limite ss'

II. *Soient* $s = \Sigma u_n$ *et* $s' = \Sigma v_n$ *deux séries convergentes à termes réels ou complexes, dont la première au moins soit absolument convergente. Formons la série* $s'' = \Sigma w_n$ *dont le terme général,*

$$w_n = u_u v_1 + u_{n-1} v_2 + \dots u_1 v_n,$$

renferme toutes les combinaisons de deux indices dont la somme est $(n + 1)$. *Cette série converge et a pour somme* ss' (MERTENS).

Désignons par r_n le module de u_n, la série Σr_n sera convergente par hypothèse et aura une somme finie σ. Soient respectivement s_n, s'_n, s''_n et σ_n les sommes des n premiers termes de chacune des séries (u), (v), (w) et (r).

Considérons la différence $s_n s'_n - s''_n$. On peut la mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &u_2 v_n + u_3 (v_{n-1} + v_n) + \dots + u_n (v_2 + v_3 + \dots + v_n) \\ &= u_2 (s'_n - s'_{n-1}) + u_3 (s'_n - s'_{n-2}) + \dots + u_n (s'_n - s'_1) \end{aligned}$$

Soit $n = p + q$ une décomposition de n en deux parties. Nous pouvons partager la somme précédente en deux parties correspondantes, que nous écrirons chacune sur une ligne :

$$\begin{aligned} &u_2 (s'_n - s'_{n-1}) + u_3 (s'_n - s'_{n-2}) + \dots + u_{p+1} (s'_n - s'_q) \\ &+ u_{p+2} (s'_n - s'_{q-1}) + \dots \qquad \dots + u_n (s'_n - s'_1). \end{aligned}$$

On peut supposer q assez grand pour que toutes les parenthèses de la première ligne aient leurs modules moindres qu'un nombre donné ε si petit qu'il soit. Alors la somme de la première ligne a son module moindre que

$$\varepsilon (r_2 + r_3 + \dots + r_{p+1}) < \varepsilon \sigma_{p+1} < \varepsilon \sigma.$$

Cette somme est donc aussi petite qu'on veut avec ε.

Les parenthèses de la seconde ligne ont leurs modules moindres qu'un nombre fixe A, car la série (v) est convergente. La somme de la seconde ligne a donc son module moindre que

$$\mathrm{A} (r_{p+2} + r_{p+3} + \dots + r_{p+q}) < \mathrm{A} (\sigma_{p+q} - \sigma_p).$$

Cette somme a donc pour limite zéro quand p tend vers l'infini.

En résumé, la différence $s_n s'_n - s''_n$ se compose de deux parties qui ont pour limite zéro quand p et q tendent vers l'infini. Comme on peut faire tendre p et q vers l'infini avec n, il vient donc

$$\lim s''_n = \lim s_n s'_n = ss'.$$

Remarque. — Le théorème précédent ne subsiste pas en général quand les deux séries Σu_n et Σv_n ne sont pas absolument convergentes. Toutefois, si la série Σw_n converge, elle a encore pour somme le produit des deux précédentes, comme on le montrera plus loin (nº 393).

372. Théorème sur les séries alternées. — *Une série $s = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots$ qui est alternée, c'est-à-dire dont les termes sont réels et alternativement positifs et négatifs, converge si ces termes vont constamment en décroissant en valeur absolue et ont pour limite zéro. Le reste de la série est de même signe et moindre en valeur absolue que le premier terme négligé.*

On a, en effet,

$$s_{2n} = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \dots + (\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n}).$$
$$s_{2n+1} = \alpha_1 - (\alpha_2 - \alpha_3) - \dots - (\alpha_{2n} - \alpha_{2n+1}).$$

Toutes les différences entre parenthèses sont positives. Donc s_{2n} est une somme positive croissante et s_{2n+1}, qui est égale à $s_{2n} + \alpha_{2n+1}$, une somme positive décroissante. Leur différence tend vers zéro. Donc elles tendent toutes deux vers une même limite, intermédiaire entre les sommes paires et les sommes impaires. Appliquons cette conclusion à la série

$$R_n = \pm [\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} + \dots];$$

on voit que R_n a le signe de son premier terme et est moindre que lui en valeur absolue.

373. Théorème d'Abel. — *Soient $s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ une série convergente à termes réels ou complexes, s_n la somme de ses n premiers termes, et S la borne supérieure de $|s_n|$. Soient ensuite $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots$ une suite de quantité positives non croissantes, ayant par conséquent une limite α, la série*

$$\sigma = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n + \dots$$

converge vers une somme σ de module moindre que $S\alpha_1$.

Soit σ_n la somme des n premiers termes de cette dernière série. On a, puisque $u_n = s_n - s_{n-1}$,

$$\sigma_n = s_1 \alpha_1 + (s_2 - s_1)\alpha_2 + \dots + (s_n - s_{n-1})\alpha_n$$

et on en tire

$$\sigma_n - s_n \alpha_n = s_1(\alpha_1 - \alpha_2) + s_2(\alpha_2 - \alpha_3) + \dots + s_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n).$$

Quand n tend vers l'infini, le second membre de cette équation a une limite finie et déterminée, car la série qui a pour terme général $s_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n)$ est absolument convergente. Celle-ci a, en effet, son terme général de module moindre que celui de la série positive convergente

$$S(\alpha_1-\alpha_2)+S(\alpha_2-\alpha_3)+\ldots=S[(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+\ldots]=S(\alpha_1-\alpha).$$

Donc $\sigma_n - s_n\alpha_n$ a une limite déterminée et le module de cette limite sera $< S(\alpha_1 - \alpha)$.

Comme, d'autre part, $s_n\alpha_n$ tend vers $s\alpha$, σ_n tend vers une limite déterminée σ et l'on a

$$|\sigma| < |s\alpha| + S(\alpha_1 - \alpha) < S\alpha + S(\alpha_1 - \alpha) = S\alpha_1.$$

Remarque I. — *La convergence de la série* (σ) *subsiste même quand* Σu_n *diverge, pourvu* : 1° *que* $|s_n|$ *ait encore une borne supérieure finie* S ; 2° *que* α_n *ait pour limite* 0.

En effet, la différence $\sigma_n - s_n\alpha_n$ a une limite finie et déterminée comme dans le cas précédent. Ensuite $|s_n\alpha_n|$ qui est $< S\alpha_n$ a pour limite 0 (même si s_n ne converge pas). Donc σ_n a une limite déterminée σ.

Remarque II. — *La convergence de la série* (σ) *subsiste encore quand les quantités* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *sont croissantes et bornées, mais seulement si la série* Σu_n *converge.*

En effet, soit α la limite (nécessairement existante) de α_n ; la série (σ) est alors la différence des deux séries convergentes ci-dessous, la seconde convergente en vertu du théorème d'Abel puisque $\alpha - \alpha_n$ est décroissant :

$$\alpha u_1 + \alpha u_2 + \ldots + \alpha u_n + \ldots,$$
$$(\alpha - \alpha_1) u_1 + (\alpha - \alpha_2) u_2 + \ldots + (\alpha - \alpha_n) u_n + \ldots.$$

Exercices.

1. Si les coefficients a_n sont non croissants et tendent vers 0 quand n tend vers l'infini, les séries

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots.$$
$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots b_n \sin nx + \ldots$$

sont convergentes (sauf la première si $x = 2k\pi$).

R. Conséquence du théorème d'Abel.

2. Soit $M_1, M_2, \ldots M_n \ldots$ une suite positive constamment croissante jusqu'à l'infini ; si la série Σu_n converge, on a (KRONECKER)

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{M_n} \sum_{k=1}^{n} M_n u_n = 0.$$

R. Démonstration analogue à celle du théorème d'Abel.

3. Si, pour $n = \infty$, les deux expressions :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k u_k, \qquad \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n)$$

ont des limites finies, la série Σu_n est convergente. Alors la limite de la première expression ne peut être que 0 (Exercice précédent).

R. On remarque que s_n est, à un facteur près qui tend vers l'unité, la somme des deux expressions considérées.

4. *Généralisation du théorème d'Abel.* — Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots$ une suite de quantités positives et bornées ; quand la série Σu_n est convergente, la série $\Sigma \alpha_n u_n$ l'est encore s'il existe une suite de quantités positives $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n \ldots$ jouissant des deux propriétés suivantes : 1° l'expression

$$\frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_n}{\mu_n} u_n$$

garde une valeur finie et 2° l'expression

$$\beta_n = \frac{\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \ldots + \mu_n \alpha_n}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}$$

varie constamment dans le même sens (ou est constante) quand n augmente (LA MAESTRA).

R. Soit $M_k = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k$; on a identiquement

$$\sum_1^n u_k = \sum_1^{n-1} M_k \left(\frac{u_k}{\mu_k} - \frac{u_{k+1}}{\mu_{k+1}} \right) + \frac{M_n}{\mu_n} u_n,$$

ce qui prouve, eu égard à 1°, que la somme

$$\Sigma M_k \left(\frac{u_k}{\mu_k} - \frac{u_{k+1}}{\mu_{k+1}} \right)$$

garde toujours une valeur finie. D'autre part, on a aussi

$$\sum_1^n \alpha_k u_k = \sum_1^{n-1} M_k \left(\frac{u_k}{\mu_k} - \frac{u_{k+1}}{\mu_{k+1}} \right) \beta_k + \frac{M_n}{\mu_n} u_n \beta_n.$$

Par conséquent, β désignant la limite existante de β_n,

$$\sum_1^n \alpha_k u_k - \beta \sum_1^n u_k = \sum_1^{n-1} M_k \left(\frac{u_k}{\mu_k} - \frac{u_{k+1}}{\mu_{k+1}} \right)(\beta_k - \beta) + M_n \frac{u_n}{\mu_n}(\beta_n - \beta).$$

Quand n tend vers l'infini, le premier terme du second membre converge (théorème d'Abel) et le second tend vers zéro. Donc $\Sigma \alpha_n u_n$ converge. En même temps, on a établi la transformation :

$$\sum_1^\infty \alpha_n u_n = \beta \sum_1^\infty u_n + \sum_1^\infty M_n \left(\frac{u_n}{\mu_n} - \frac{u_{n+1}}{\mu_{n+1}} \right)(\beta_n - \beta).$$

5. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ une suite de quantités positives et bornées dont chacune est inférieure (ou supérieure) à la moyenne arithmétique des précédentes ; si la série Σu_n converge, la série $\Sigma \alpha_n u_n$ converge aussi, à condition que nu_n soit borné (La Maestra).

R. Cas particulier du théorème précédent : On fait les μ égaux à l'unité ; β_n est la moyenne arithmétique de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ et l'on a

$$\sum_1^\infty \alpha_n u_n = \beta \sum_1^\infty u_n + \sum_1^\infty n(u_n - u_{n+1})(\beta_n - \beta).$$

Le théorème précédent subsiste quand Σu_n n'est pas convergent mais seulement borné, à condition que α_n tende vers 0, auquel cas $\beta = 0$.

§ 3. Séries de fonctions.

374. Convergence uniforme. — Considérons d'abord une série réelle,

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = s_n + R_n,$$

dont les termes sont des fonctions d'une variable réelle x. Si la série converge pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (a, b), la somme s de la série sera une fonction de x.

Soit ε un nombre positif donné, aussi petit que l'on veut. Pour chaque valeur déterminée de x, la condition

$$(1) \qquad |R_n| < \varepsilon$$

se vérifie pour tous les indices n supérieurs à un nombre fixe N, car cette condition sert de définition à s. Mais, si on laisse x variable, il peut se faire que N dépende nécessairement de x.

Si, quelque petit que soit ε, *la condition* (1) *se vérifie pour tous les indices n supérieurs à un nombre* N *indépendant de* x *et pour toutes les valeurs de* x *dans l'intervalle* (a, b), *on dit que la série converge uniformément dans cet intervalle.*

Dans le cas des *séries positives,* la condition se simplifie. La convergence sera *uniforme* si la condition (1) a lieu *pour une valeur de n indépendante* de x, ne fût-ce qu'une seule. En effet, la condition sera vérifiée *a fortiori* pour les indices plus grands.

La définition de la convergence uniforme s'étend d'elle-même au cas où les termes de la série sont des fonctions de plusieurs variables $x, y, \ldots$ Si l'on peut attribuer à ces variables une infinité de systèmes de valeurs, la convergence sera *uniforme* si la condition (1) se vérifie pour tous ces systèmes, quand l'indice n est supérieur à un nombre N indépendant des variables. Il

suffira d'ailleurs qu'elle ait lieu pour une seule valeur de l'indice n indépendante des variables si la série est positive.

Enfin les termes de la série peuvent aussi être fonctions d'une variable complexe z et nous entendons par là que ces termes sont déterminés pour chaque valeur de z. Quand la série converge pour des valeurs de z en nombre infini, par exemple pour toutes les valeurs comprises dans un cercle, la convergence sera *uniforme* pour cet ensemble de valeurs, si la condition (1) a lieu pour toutes ces valeurs quand n surpasse un nombre N indépendant de z.

375. Exemples de séries à convergence non uniforme. — On peut former facilement des séries qui convergent pour toutes les valeurs de x dans un certain intervalle, mais non uniformément. En voici deux exemples remarquables :

I. Considérons d'abord la progression géométrique de raison $(1-x)$

$$s = x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \dots + x(1-x)^n + \dots$$

Cette progression converge pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $(0, 1)$. Si x est > 0, la raison est plus petite que 1 et la progression a pour somme l'unité. Si $x = 0$, tous les termes sont nuls et la somme aussi. Donc s est une *fonction discontinue de x*, qui passe de 0 à 1 quand x passe de 0 à une valeur positive si petit qu'elle soit.

Cette série n'est pas uniformément convergente.

En effet, pour les valeurs positives de x, on a

$$\mathrm{R}_n = x(1-x)^n[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \dots] = (1-x)^n;$$

et, si n est constant,

$$\lim_{x=0} \mathrm{R}_n = 1.$$

Il est donc impossible de satisfaire à la condition $\mathrm{R}_n < \varepsilon < 1$ par une valeur de n indépendante de x.

II. Considérons, en second lieu, la série

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x\,[n^2 e^{-nx} - (n-1)^2 e^{-(n-1)x}].$$

On a, pour toute valeur positive de x,

$$s_n = xn^2 e^{-nx}, \qquad \text{d'où} \qquad s = x \lim \frac{n^2}{e^{nx}} = 0,$$

car une exponentielle est infiniment grande par rapport à une puissance.

Pour $x = 0$, on a $s_n = 0$ et $s = 0$.

Donc la série converge et l'on a $s = 0$ pour toute valeur nulle ou positive de x. Mais cette série ne converge pas uniformément. En effet,

$$R_n = s - s_n = - xn^2 e^{-nx}.$$

Si l'on pose $x = 1 : n$, et qu'on fasse tendre n vers l'infini, x tend vers 0 et le reste, pris en valeur absolue,

$$| R_n | = \frac{n}{e},$$

augmente indéfiniment avec n. Donc la convergence n'est pas uniforme dans un intervalle comprenant le point 0.

376. Critère de convergence uniforme. — *Une série de fonctions réelles ou complexes est uniformément convergente si les modules de ses termes ne surpassent pas les termes de même rang d'une série convergente à termes constants et positifs.*

Il est clair que, dans ce cas, le reste de la série de fonctions est de module moindre que le reste de la série à termes constants. Le reste R_n de la série de constantes peut être supposé $< \varepsilon$ en donnant à n une valeur convenable. Donc, en prenant ce nombre n de termes ou davantage dans la série de fonctions, le reste de cette série sera également de module $< \varepsilon$. Donc la série converge uniformément.

377. Continuité des séries uniformément convergentes. — I. *Si les termes d'une série uniformément convergente sont des fonctions continues d'une ou plusieurs variables réelles ou complexes dans un domaine déterminé, la somme de la série est une fonction continue dans ce domaine.*

Posons $s = s_n + R_n$ et désignons par Δs, Δs_n et ΔR_n les accroissements de ces trois quantités pour un système déterminé d'accroissements de la ou des variables. On a

$$\Delta s = \Delta s_n + \Delta R_n = \Delta s_n + (R_n + \Delta R_n) - R_n.$$

Nous allons montrer que les trois termes dans lesquels on a décomposé Δs peuvent être supposés aussi petits qu'on veut avec

les accroissements des variables. En effet, la convergence étant uniforme, on peut prendre n assez grand pour que les deux restes $| R_n |$ et $| R_n + \Delta R_n |$ soient plus petits qu'un nombre positif ε donné d'avance si petit qu'il soit, quels que soient les accroissements des variables. Cela fait, s_n, qui est la somme d'un nombre limité de fonctions continues, est une fonction continue. Donc on peut rendre sa variation absolue $< \varepsilon$ en rendant les accroissements des variables suffisamment petits. Donc la variation $| \Delta s |$ sera $< 3\varepsilon$, quantité arbitrairement petite. Donc s est une fonction continue.

Quand la convergence n'est pas uniforme, la continuité de la somme n'est pas une conséquence de celle des termes de la série. Nous en avons vu la preuve au nº 375 par l'exemple de la série $\Sigma x (1 - x)^n$.

La réciproque n'est vraie que pour les séries réelles et positives :

II. *Lorsqu'une série de fonctions continues et positives ne converge pas uniformément, la somme de la série est discontinue dans le domaine considéré.*

Considérons, pour fixer les idées, des fonctions positives d'une seule variable x dans un intervalle (a, b) et commençons par une remarque préliminaire.

Supposons que l'intervalle (a, b) soit partagé en deux parties. Si, ε étant donné, la condition $R_n < \varepsilon$ se réalise pour une valeur n' de n indépendante de x dans la première partie, et aussi pour une valeur n'' de n indépendante de x dans la seconde partie, elle se réalise dans l'intervalle entier pour la plus grande des deux valeurs n' et n'', car, les termes étant positifs, R_n décroît quand l'indice augmente.

Ceci posé, si la convergence de la série positive n'est pas uniforme dans l'intervalle (a, b), il existe un nombre positif ε tel que la condition $R_n < \varepsilon$ soit irréalisable dans cet intervalle pour une valeur de n indépendante de x. Cette condition restera irréalisable, en vertu de la remarque précédente, dans l'un des deux intervalles moitiés, puis dans l'un des intervalles moitiés de celui-là, et ainsi de suite. Cette suite illimitée d'intervalles où la condition est irréalisable, chacun intérieur à tous les précédents et dont les amplitudes tendent vers zéro, con-

verge, par conséquent, vers un point ξ de l'intervalle (a, b). Ce point ξ, compris dans tous les intervalles précédents, appartient donc à un intervalle aussi petit qu'on veut où la condition $R_n < \varepsilon$ est irréalisable pour une valeur de n indépendante de x. — Je dis que la somme s de la série est discontinue au point ξ et que l'oscillation de s en ce point surpasse ε.

En effet, on a $s = s_n + R_n$, donc, s_n étant continu au point ξ, l'oscillation de s en ce point est la même que celle de R_n *quel que soit n*. Mais pour n assez grand, R_n est aussi petit qu'on veut au point ξ et surpasse toujours ε dans son voisinage immédiat. Donc l'oscillation de R_n (ou de s) est au moins égal à ε.

Ces théorèmes conduisent à la conclusion suivante :

III. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de fonctions continues et positives ait une somme continue, est que la convergence soit uniforme.*

378. Intégration des séries réelles uniformément convergentes. — *Si les termes d'une série réelle, uniformément convergente, sont des fonctions continues d'une variable réelle x dans l'intervalle (a, b), l'intégrale de la série dans cet intervalle peut s'obtenir, par décomposition, en intégrant chaque terme de la série.*

D'autre part, si, au lieu d'intégrer dans l'intervalle (a, b), on intègre dans une portion variable (a, x) de cet intervalle, la série intégrale sera encore uniformément convergente dans l'intervalle (a, b).

Considérons, en effet, la série

$$s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = s_n + R_n\,;$$

on aura, s et R_n étant continus (n° 377) et, par suite, intégrables,

$$\int_a^b s\,dx = \int_a^b s_n\,dx + \int_a^b R_n\,dx.$$

Faisons tendre n vers l'infini ; la convergence étant uniforme, $|\,R_n\,|$ devient inférieur à tout nombre positif ε, si petit qu'il soit, quand n tend vers l'infini, auquel cas on a

$$\left|\int_a^b R_n\,dx\right| < \varepsilon(b - a).$$

Cette intégrale tend donc vers zéro quand n tend vers l'infini. Il vient ainsi

$$\int_a^b s\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b s_n\,dx = \int_a^b u_1\,xd + \int_a^b u_2\,dx + \ldots,$$

Pour démontrer la seconde partie du théorème, on remarque que l'on peut remplacer dans cette relation b par une valeur x quelconque de l'intervalle (a, b). Alors le reste de la série intégrale a pour valeur absolue

$$\left| \int_a^x \mathrm{R}_n\,dx \right| < \varepsilon(b - a),$$

ce qui prouve que la convergence de la série intégrale est uniforme.

Séries positives. — *Une série de fonctions continues et positives dont la somme est continue, convergeant uniformément* (n° 377, III), *peut toujours être intégrée terme à terme.*

Remarque. — Quand la convergence n'est pas uniforme, l'intégration terme à terme n'est plus toujours légitime. Nous allons le montrer par un exemple.

Reprenons la série, considérée précédemment (n° 375),

$$s = \Sigma x[n^2 e^{-nx} - (n - 1)^2\, e^{-(n-1)x}] = 0,$$

dans laquelle x est nul ou positif. On a évidemment

$$\int_0^1 s\,dx = 0.$$

Mais l'intégration terme à terme conduit à un résultat différent du précédent. On a, en effet,

$$s_n = xn^2 e^{-nx}.$$

Si l'on intègre terme à terme, on trouve

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 s_n\,dx = \lim \int_0^1 nx\, e^{-nx}\, ndx = \int_0^\infty te^{-t}\,dt = 1,$$

tandis que l'intégrale de s est nulle.

379. Dérivation des séries réelles. — *Si les termes d'une série réelle convergente sont des fonctions d'une variable réelle x ayant des dérivées continues, et si la série de ces dérivées converge uniformément dans un intervalle (a, b), la somme de la série des dérivées est la dérivée de la somme de la série primitive.*

Soient, en effet, $s = \Sigma u_n$ la série primitive et $\sigma = \Sigma u'_n$ la série

dérivée, dont la somme est fonction continue de x (n° 377). Faisons varier x de a à b, on aura, en vertu du théorème précédent,

$$\int_a^x \sigma\, dx = \Sigma \int_a^x u'_n\, dx = \Sigma[u_n - (u_n)_a],$$

l'indice a signifiant qu'il faut faire $x = a$ dans la fonction entre parenthèses. Comme la série primitive converge par hypothèse, le résultat précédent peut se mettre sous la forme

$$\int_a^x \sigma\, dx = \Sigma u_n - \Sigma(u_n)_a = s - (s)_a,$$

et, en égalant les dérivées de deux membres par rapport à x, σ étant continue, on trouve $\sigma = s'$ comme le veut le théorème.

Ce théorème et ceux des trois nos précédents sont les cas particuliers élémentaires de théorèmes beaucoup plus généraux, qui vont être exposés dans le petit texte qui suit :

380. Convergence uniforme à moins de ε près en un point. — Considérons une série réelle Σu_n dont les termes sont des fonctions de x dans un intervalle (a, b) ; nous donnerons la définition suivante :

La série converge uniformément à moins de ε près en un point ξ de l'intervalle (a, b), si, le nombre positif ε étant donné, on peut lui faire correspondre un indice n aussi grand qu'on veut et un nombre positif δ, tels que l'on ait

$$|\,R_n\,| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $(\xi - \delta, \xi + \delta)$.

Théorème I. — *Si les termes d'une série convergente Σu_n sont des fonctions continues au point ξ, et si la série converge uniformément à moins de ε près en ce point, l'oscillation au point ξ de la somme s de la série est $< 2\varepsilon$. — Au contraire, si la série ne converge pas uniformément à moins de ε près au point ξ, l'oscillation de s au point ξ est au moins égale à ε.*

On a, en effet, $s = s_n + R_n$. Comme s_n est continue au point ξ, l'oscillation de s en ce point est la même que celle de R_n *quel que soit n.* Il suffit d'examiner celle-ci.

Si la série converge uniformément à moins de ε près, $|\,R_n\,|$ devient inférieur à ε dans tout l'intervalle $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ pour certaines valeurs de n, auquel cas l'oscillation de R_n au point ξ est $< 2\varepsilon$.

Si la série ne converge pas uniformément à moins de ε près, $|\,R_n\,|$ surpasse toujours ε dans le voisinage immédiat de ξ, tandis qu'il tend vers 0 au point ξ quand n augmente indéfiniment, donc l'oscillation de R_n au point ξ est au moins égale à ε.

De là découle immédiatement le théorème suivant :

Théorème II. — *Lorsque les termes d'une série sont des fonctions continues de x au point ξ, la condition nécessaire et suffisante pour que la somme de la série soit aussi continue en ce point, est que la convergence soit uniforme à moins de ε près en ce point, quelque petit que soit ε.*

La définition et les théorèmes précédents s'étendent d'eux-mêmes aux fonctions de plusieurs variables réelles ou complexes et nous ne nous arrêterons pas davantage à cette généralisation.

381. Convergence quasi-uniforme. Continuité des séries. — Considérons encore une série réelle dont les termes sont fonctions de x dans un intervalle (a, b). Nous dirons (Borel) que *la convergence de la série est quasi-uniforme dans l'intervalle (a, b), si à tout système de deux nombres positifs ε et p le premier aussi petit, le second aussi grand qu'on veut, on peut faire correspondre un nombre $q > p$ tel que la condition*

$$|R_n| < \varepsilon$$

puisse se réaliser pour une valeur de n, variable avec celle de x dans l'intervalle (a, b), mais toujours comprise entre les deux nombres fixes p et q.

Pour les séries à termes positifs, la convergence uniforme se confond évidemment avec la convergence quasi-uniforme, car, si les conditions précédentes sont vérifiées, R_n, qui décroît quand n augmente, sera $< \varepsilon$ quel que soit x si n est $\geqslant q$.

Théorème. — *Si, quelque petit que soit ε, une série Σu_n converge uniformément à moins de ε près en chaque point de l'intervalle (a, b), la convergence sera quasi-uniforme dans l'intervalle (a, b).*

En effet, supposons, par impossible, que la convergence ne soit pas quasi-uniforme dans l'intervalle (a, b). Nous pouvons assigner deux nombres ε et p tels que la condition $|R_n| < \varepsilon$ soit impossible *pour $n > p$ et borné* quand x varie dans l'intervalle (a, b). Partageons cet intervalle en deux autres, cette impossibilité subsistera dans un des deux intervalles moitiés du précédent, puis dans la moitié de cette moitié, et ainsi de suite indéfiniment. Nous formerons ainsi une infinité d'intervalles indéfiniment décroissants, chacun intérieur à tous les précédents et tendant vers un point ξ de l'intervalle (a, b). Ce point ξ tomberait donc dans un intervalle aussi petit qu'on veut où l'on ne pourrait avoir $|R_n| < \varepsilon$ pour $n > p$ et borné. Cette conclusion est contraire à l'hypothèse que la série converge uniformément à moins de ε près au point ξ.

Corollaire. — En comparant le théorème précédent au théorème II du nº 380, on en conclut immédiatement le suivant : *Une série de fonctions continues dont la somme est une fonction continue de x dans un intervalle (a, b), converge quasi-uniformément dans cet intervalle.*

La réciproque est vraie :

Une série de fonctions continues de x qui converge quasi-uniformément dans un intervalle (a, b), a pour somme une fonction continue de x.

En effet, soit ξ un point de l'intervalle ; montrons que la série est continue en ce point.

Prenons d'abord l'indice p assez grand pour que l'on ait, au point déterminé ξ,

$$| R_n(\xi) | < \varepsilon, \qquad \text{si } n > p.$$

Soit q le nombre qui correspond au système ε et p ; on aura, pour une valeur de n comprise entre p et q, mais qui dépend de x,

$$R_n(x) < \varepsilon.$$

On aura donc (n dépendant toujours de x)

$$s(x) - s(\xi) = \sum_1^n [u_k(x) - u_k(\xi)] + R_n(x) - R_n(\xi)$$

et *a fortiori*, puisque n est $< q$ et $| R_n | < \varepsilon$,

$$| s(x) - s(\xi) | < \sum_1^q | u_k(x) - u_k(\xi) | + 2\varepsilon.$$

Quand x tend vers ξ, la somme des q termes $u_k(x) - u_k(\xi)$ tend vers zéro, donc la limite du premier membre est $< 2\varepsilon$. Elle est donc nulle, puisque ε est arbitraire, donc s est continue au point ξ.

De là le théorème suivant de M. Arzela :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de fonctions continues soit elle-même continue dans un intervalle* (a, b), *est que la convergence de la série soit quasi-uniforme dans cet intervalle.*

Encore une fois, les définitions et les théorèmes qui précèdent s'étendent facilement aux séries dont les termes sont des fonctions de plusieurs variables réelles ou complexes.

382. Intégration et dérivation des séries réelles. — Soit Σu_n une série convergente de fonctions de x bornées et mesurables. Si les sommes successives $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ sont aussi bornées dans leur ensemble, on a, comme on le sait, avec l'intégrale de Lebesgue, (n° 250, I),

$$\int_a^b s\,dx = \lim \int_a^b s_n\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a u_2\,dx + \ldots$$

et la série peut être intégrée terme à terme.

Remarquons que, si les sommes s_n (et, par suite, s) sont bornées dans leur ensemble, les restes R_n le sont aussi, et réciproquement. On a donc le théorème suivant :

Théorème I. — *Une série convergente de fonctions bornées et mesurables dans un intervalle* (a, b) *peut être intégrée* (L) *terme à terme comme un polynome si le reste* R_n *de la série est borné quels que soient* n *et* x.

Le théorème précédent se généralise en remplaçant le théorème de

M. Lebesgue par le théorème II du nº 250 qui est plus général. On obtient ainsi l'énoncé suivant :

Théorème II. — *Une série convergente de fonctions sommables peut être intégrée* (L) *terme à terme dans un intervalle* (a, b), *si* s_n, *ou (ce qui revient au même) si* R_n *est, quel que soit* n, *de module inférieur à une fonction positive sommable* $\varphi(x)$.

Ces théorèmes subsistent si l'intégration se fait, non dans un intervalle, mais sur un ensemble mesurable.

Ces théorèmes fournissent des théorèmes réciproques relatifs à la dérivation des séries. Nous énoncerons seulement le réciproque du premier.

Théorème III. — *Soit* Σu_n *une série de fonctions continues et dérivables, convergente dans un intervalle* (a, b) ; *on pourra la dériver terme à terme en un point* x, *si la série dérivée* $\Sigma u'_n$ *converge et a son reste* R'_n *borné dans un intervalle* $(x - \delta, x + \delta)$ *si petit qu'il soit ; et si, de plus, la somme de cette série est continue au point* x.

Quand les dérivées u'_n sont continues au point x, il faudra, pour que cette dernière condition soit réalisée, que la série dérivée converge uniformément au point x à moins de ε près quelque petit que soit ε (nº 380, II).

Ce théorème s'établit par la même voie que celui du nº 379.

Cas des séries positives. — Si la somme d'une série positive est bornée, le reste R_n l'est *a fortiori*. Donc *une série de fonctions positives et intégrables* (L) *qui a une somme bornée dans un intervalle* (a, b), *peut toujours être intégrée* (L) *terme à terme.*

Plus généralement, en vertu du théorème III du nº 250 : *Une série de fonctions positives sommables peut toujours être intégrée* (L) *terme à terme, seulement, si la somme de la série n'est pas sommable, son intégrale est infinie.*

§ 4. Séries potentielles.

383. Définition. — Les séries potentielles sont celles qui sont ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle ou complexe $(z - a)$. Elles sont de la forme

$$a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \ldots + a_n(z - a)^n + \ldots$$

En posant $z - a = x$, elles prennent la forme

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \Sigma a_n x^n.$$

C'est sous cette forme que nous allons les étudier. Ces series

jouissent de propriétés qui leur sont propres et elles ont une importance exceptionnelle.

Dans les démonstrations suivantes, nous désignerons en général par r le module de x et par $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ ceux de $a_0, a_1, \ldots a_n$.

384. Cercle de convergence.—Considérons la suite des quantités :

$$\rho_1 = \alpha_1, \qquad \rho_2 = \sqrt{\alpha_2}, \ldots \qquad \rho_n = \sqrt[n]{\alpha_n}, \ldots$$

Trois cas peuvent se présenter :

1° Si ρ_n a pour limite zéro pour n infini, la série positive $\Sigma u_n = \Sigma \alpha_n r^n$ converge pour toute valeur positive de r en vertu du critère de première espèce de Cauchy (n° 364), car on a, quel que soit r,

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{\alpha_n r^n} = \lim \rho_n r = 0.$$

Donc la série $\Sigma a_n x^n$ est *absolument convergente* pour toute valeur réelle ou complexe de x. On dit, dans ce cas, que la série (1) est une *fonction entière* de x.

2° Si ρ_n peut surpasser tout nombre assignable, la série $\Sigma a_n x^n$ diverge pour toute valeur de x autre que zéro, car le module, $(\rho_n r)^n$, de son terme général n'a pas pour limite zéro.

3° Quand aucune de ces deux hypothèses ne se présente, ρ_n a une *plus grande limite* (n° 15) finie et positive L, c'est-à-dire que ρ_n devient définitivement inférieur à $L + \varepsilon$ et ne devient jamais *définitivement* inférieur à $L - \varepsilon$ quel que petit que soit le nombre positif ε. Posons $L = 1 : R$; je dis que la série positive $\Sigma u_n = \Sigma \alpha_n r^n$ converge si r est $< R$ et diverge si r est $> R$.

En effet, si r est $< R$, on peut poser $r = \frac{1}{L+\varepsilon}$, d'où

$$\sqrt[n]{u_n} = \rho_n r = \frac{\rho_n}{L+\varepsilon}.$$

Cette expression devenant définitivement inférieure à un nombre fixe < 1, la série converge en vertu du critère de Cauchy.

Au contraire, si $r > R$, on a $r = \frac{1}{L-\varepsilon}$, d'où

$$\sqrt[n]{u_n} = \rho_n r = \frac{\rho_n}{L-\varepsilon}.$$

Cette expression ne devenant jamais définitivement < 1, u_n n'a pas pour limite 0.

Donc la série $\Sigma a_n x_n$ est *absolument convergente* pour toute

valeur réelle ou complexe de x dont le module est $< R$ et elle diverge pour toute valeur dont le module est $> R$ (le terme général n'ayant pas pour limite zéro).

Le cercle de rayon R décrit autour de l'origine s'appelle le *cercle de convergence* : la série $\Sigma a_n x^n$ est absolument convergente à l'intérieur et divergente à l'extérieur. Sur la circonférence elle-même, il y a doute ; la série converge ou diverge suivant le cas.

D'après ce qui précède, le rayon du cercle de convergence est l'inverse de la plus grande limite de $\sqrt[n]{\alpha_n}$. Donc, en particulier, *si* $\sqrt[n]{\alpha_n}$ *a une limite, cette limite est l'inverse du rayon de convergence.*

Remarque. — *Le rayon de convergence est aussi égal à la limite, quand elle existe, du rapport* $\alpha_n : \alpha_{n+1}$. En effet, soit R cette limite ; le critère de seconde espèce de Cauchy s'applique alors à la série $\Sigma u_n = \Sigma \alpha_n r^n$, il vient

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\alpha_{n+1} r}{\alpha_n} = \frac{r}{R},$$

donc la série converge ou diverge selon que $r <$ ou $> R$.

385. Théorème. — *Une série potentielle converge uniformément dans tout cercle de rayon $\rho < R$ décrit autour de l'origine, et elle a, par conséquent, pour somme une fonction continue de x dans ce cercle.*

En effet, la série à termes constants et positifs $\Sigma \alpha_n \rho^n$ est convergente par hypothèse, puisque $\rho < R$. Les modules des termes de la série $\Sigma a_n x^n$ ne peuvent surpasser les termes correspondants de la série précédente dans le cercle de rayon ρ. Donc cette série converge uniformément (n° 376).

386. Fonctions analytiques. — A l'intérieur du cercle de convergence, une série potentielle définit donc une fonction de la variable complexe x. Les fonctions qui peuvent être ainsi définies par des séries potentielles, portent le nom de *fonctions analytiques*. Ce sont les plus importantes, mais leur étude ne sera pas approfondie dans ce cours.

La dérivée $f'(x)$ d'une fonction analytique $f(x)$ est, par défition, la limite du quotient

$$\frac{f(x) + h) - f(x)}{h}$$

quand h tend vers zéro par une suite de valeurs réelles ou complexes quelconques. Le théorème suivant prouve l'existence de la dérivée pour toute fonction analytique :

387. Théorème. — *Soit* $f(x) = \Sigma a_n x^n$ *une série convergente dans un cercle de rayon* R ; *la série dérivée* $\Sigma n a_n x^{n-1}$ *sera convergente dans le même cercle que la première et aura pour somme* $f'(x)$.

Soit x un point quelconque situé dans le cercle de convergence. Considérons la série convergente à termes positifs

$$F(r) = \Sigma \alpha_n r^n.$$

Donnons à r un accroissement positif δ, assez petit pour que $r + \delta$ soit encore $< R$. La série $F(r + \delta)$ sera encore convergente et l'on aura

$$\begin{aligned}\frac{F(r+\delta) - F(r)}{\delta} &= \Sigma\alpha_n \frac{(r+\delta)^n - r^n}{\delta} \\ (1) \qquad &= \Sigma\alpha_n \left[n r^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta r^{n-2} + \ldots \right].\end{aligned}$$

Donnons à x un accroissement variable h, réel ou complexe, et formons l'expression, analogue à la précédente,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \Sigma a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ (2) \qquad &= \Sigma a_n \left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} h x^{n-2} + \ldots \right].\end{aligned}$$

La comparaison des séries (1) et (2) montre immédiatement que, si $|h|$ est $< \delta$, tous les termes de la série (2) ont leurs modules moindres que les termes de la série (1) qui sont constants et positifs. Donc, si h tend vers zéro, la série (2) converge uniformément (n° 376) et est fonction continue de h (n° 377). Sa limite pour $h = 0$ se confond avec sa valeur pour $h = 0$. En faisant tendre h vers zéro, l'équation (2) donne donc, à la limite,

$$f'(x) = \Sigma n a_n x^{n-1}.$$

388. Théorème d'Abel. — *Si la série* $\Sigma a_n x^n$ *converge pour une valeur réelle* x_1 *de* x, *elle converge uniformément dans l'intervalle* $(0, x_1)$ *et elle a pour somme une fonction continue de* x *dans cet intervalle.*

Le reste R_n n'est autre chose que la série

$$R_n = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

La série proposée étant convergente pour $x = x_1$ par hypothèse, à tout nombre positif ε donné, si petit qu'il soit, correspond un entier N assez grand pour que la condition

$$| a_n x_1^n + a_{n+1} x_1^{n+1} + \dots + a_{n+p} x_1^{n+p} | < \varepsilon$$

ait lieu, quel que soit p, pourvu que n soit $>$ N.

D'autre part, si l'on a soit $0 \leqslant x \leqslant x_1$, soit $x_1 \leqslant x \leqslant 0$, la suite

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n, \quad \left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1}, \dots \quad \left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+p}, \dots$$

est positive, stationnaire ou décroissante. Donc la série

$$a_n x_1^n \left(\frac{x}{x_1}\right)^n + a_{n+1} x_1^{n+1} \left(\frac{x}{x_1}\right)^{n+1} + \dots = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

converge (nº 373) et sa somme est $< \varepsilon \left(\frac{x}{x_1}\right)^n$ et *a fortiori* $< \varepsilon$.

On a donc $| R_n | < \varepsilon$, quel que soit x, et la série proposée converge uniformément dans l'intervalle $(0, x_1)$.

389. Sur l'emploi du théorème précédent. — Le théorème d'Abel sert le plus souvent à étendre aux points de la circonférence du cercle de convergence des relations établies dans l'intérieur seulement de ce cercle.

Supposons qu'on ait, dans l'intérieur du cercle,

$$f(x) = \Sigma a_n x^n$$

et que $f(x)$ soit continue en un point X de la circonférence. La relation précédente subsistera au point X, *pourvu que la série converge en ce point.*

Soit, en effet, r une variable réelle comprise entre 0 et 1 ; on a, par hypothèse,

$$f(rX) = \Sigma(a_n X^n)\, r^n.$$

Faisons tendre r vers l'unité ; on aura, en vertu du théorème d'Abel,

$$f(X) = \Sigma a_n X^n.$$

390. Application à la multiplication des séries. — Considérons deux séries convergentes à termes réels ou complexes :

$$s = \Sigma u_n, \qquad s' = \Sigma v_n.$$

Formons la série $s'' = \Sigma w_n$, dont le terme général est

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1.$$

Théorème. — *Si la série Σw converge, elle a pour somme ss'.*

En effet, les deux séries :

$$\varphi(x) = \Sigma u_n x^n, \qquad \psi(x) = \Sigma v_n x^n,$$

sont convergentes pour $x = 1$. Donc leur rayon de convergence est au moins égal à 1 et elles sont *absolument convergentes* si $|x|$ est < 1. On a donc, sans difficulté si $|x|$ est < 1 (nº 371),

$$\varphi(x)\psi(x) = \Sigma w_n x^{n+1}.$$

Faisons tendre x vers l'unité. On aura, par le théorème d'Abel,

$$\lim \varphi(x) = s, \qquad \lim \psi(x) = s', \qquad \lim \Sigma w_n x^{n+1} = \Sigma w_n = s''.$$

Donc $s'' = ss'$.

391. **Théorème. Série illimitée de Maclaurin.** — *Une fonction réelle ou complexe ne peut être développée en série potentielle que d'une seule manière.*

En effet, soit $f(x)$ la somme d'une série potentielle, convergente dans un cercle de rayon R :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

En dérivant successivement, il vient, dans le même cercle,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots,$$
$$f''(x) = 2a_2 + 2.3a_3 x + \dots,$$
$$f'''(x) = 2.3a_3 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Posant $x = 0$ dans ces équations, on en tire successivement

$$a_0 = f(0), \qquad a_1 = f'(0), \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{1.2}, \qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{1.2.3} \dots$$

Donc tous les coefficients de la série sont déterminés. En substituant ces valeurs dans la série, il vient

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots$$

C'est la *série illimitée de Maclaurin*. Nous retrouvons donc, par une autre voie, la loi de formation des coefficients successifs obtenue au nº 125. Tandis que nous avons raisonné là sur

un nombre limité de termes, nous avons raisonné ici sur des sommes prolongées à l'infini. Mais tandis que, les variables étant réelles, la formule limitée du n° 125 ne suppose que l'existence des dérivées de $f(x)$, celle que nous venons d'obtenir n'est nullement démontrée pour une fonction $f(x)$ quelconque. Elle ne l'est que *pourvu que le développement soit possible.*

392. Nouvelles expressions du terme complémentaire de la formule de Maclaurin. — Le procédé qui se présente immédiatement à l'esprit pour reconnaître si une fonction $f(x)$ d'une variable réelle peut s'exprimer en série potentielle, consiste à la développer par la formule limitée de Maclaurin et à vérifier si *le terme complémentaire* tend vers 0 quand le nombre n des termes augmente indéfiniment. S'il en est ainsi, en faisant tendre n vers l'infini, on obtiendra l'expression de $f(x)$ en série illimitée.

Ceci nous amène à chercher une nouvelle forme du *terme complémentaire* ou du *reste.* Nous allons l'obtenir en nous servant du calcul intégral.

Soit $f(x)$ une fonction, continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n, d'une variable réelle x. En faisant une première intégration par parties, on a

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x-t)dt = xf'(0) + \int_0^x f''(x-t)tdt.$$

On peut faire une nouvelle intégration par parties portant sur tdt, et continuer ainsi de suite, en faisant toujours porter l'intégration sur la puissance de t. Après $n - 1$ intégrations par parties consécutives, on obtient

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \mathrm{R}_n \\ \mathrm{R}_n = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x f^{(n)}(x-t)\, t^{n-1}\, dt. \end{cases}$$

C'est la formule de Maclaurin avec l'*expression exacte du reste.* Par le changement de variables $t = x(1-u)$, le reste s'écrit aussi

$$(2)\qquad \mathrm{R}_n = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(ux)\,(1-u)^{n-1}\,du.$$

Au moyen du théorème de la moyenne, on peut obtenir des

expressions plus simples du reste, mais qui ont l'inconvénient de renfermer une quantité inconnue θ comprise entre 0 et 1. Si l'on fait sortir $f^{(n)}(ux)$ du signe d'intégration, on trouve

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x).$$

C'est l'expression connue (nº 125).

§ 5. Développement des fonctions réelles en séries potentielles. Discussion du reste.

393. Considérations générales. — Lorsqu'on se propose de développer en séries potentielles des fonctions qui dépendent d'une variable complexe, il existe des principes généraux qui permettent de supprimer à peu près toute discussion. Ces principes font l'objet de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Pour le moment, nous considérons exclusivement les variables réelles. Pour obtenir le développement de $f(x)$ en série potentielle, le procédé le plus élémentaire consiste à passer de la formule limitée de Maclaurin à la formule illimitée en faisant tendre n vers l'infini.

Il faut démontrer que le *terme complémentaire* tend vers zéro. C'est à cela que servent les expressions générales de ce terme que nous avons fait connaître au nº précédent. Mais la discussion est loin d'être toujours facile sur ces expressions générales. Elle est simple pour les fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$. Elle l'est déjà moins pour les autres fonctions élémentaires, et pour les fonctions plus compliquées, elle est le plus souvent impraticable.

Heureusement, pour la plupart des fonctions, on trouve des expressions particulières de R_n, non comprises dans les formules générales, et qui se prêtent à une discussion plus facile. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans le paragraphe actuel.

A côté du procédé qui consiste à passer de la série limitée à la série illimitée, il y en a un autre, infiniment plus riche en ressources. On pose *a priori* la série illimitée et on démontre directement au moyen de ses propriétés particulières qu'elle a pour somme $f(x)$. Ce procédé est moins élémentaire que le premier, mais, pour en faire saisir la portée, nous commencerons par l'appliquer aux fonctions e^x, $\sin x$ et $\cos x$. 28

394. Fonction exponentielle. — Considérons la série

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

En vertu du second critère de Cauchy (nº 364), elle est absolument convergente pour toute valeur de x. En effet, le module de $u_{n+1} : u_n$ est égal à $| x | : n$ et tend vers zéro avec $1 : n$, quel que soit x. Cette série jouit de la propriété de se reproduire par dérivation et l'on a $f(0) = 1$. Ces deux propriétés suffisent pour montrer que la série a pour somme e^x. En effet,

$$\mathrm{D}. f(x)e^{-x} = [f'(x) - f(x)]e^{-x} = 0.$$

Donc $f(x)e^{-x}$ est une constante. Faisant $x = 0$, on voit que cette constante est 1. Donc $f(x) = e^x$.

395. Fonctions circulaires. — Considérons les deux séries, dont la seconde est la dérivée de la première,

$$\varphi(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \qquad \varphi'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

Elles convergent pour toute valeur de x comme la précédente, et l'on a

$$\varphi''(x) = -\varphi(x), \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 1.$$

Je dis qu'il en résulte $\varphi(x) = \sin x$.

Il suffit de remarquer que l'on aura nécessairement

$$\varphi(x) \cos x - \varphi'(x) \sin x = 0, \qquad \varphi(x) \sin x + \varphi'(x) \cos x = 1.$$

En effet, les premiers membres sont des constantes, car leurs dérivées s'annulent en vertu des propriétés de φ. En faisant $x = 0$, on voit que ces constantes sont 0 et 1. On tire alors des deux équations précédentes $\varphi(x) = \sin x$ et $\varphi'(x) = \cos x$.

396. Séries logarithmiques. — Pour développer $\mathrm{Log}\,(1 + x)$, cherchons une expression particulière du reste R_n. Pour cela, partons de l'identité

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1 - (-x)^n + (-x)^n}{1 - (-x)} = \sum_0^{n-1} (-x)^k + \frac{(-x)^n}{1+x}.$$

Intégrons les deux membres de 0 à x, ce qui suppose $x > -1$; l'intégrale du dernier terme sera R_n. Il vient ainsi

$$(1) \qquad \mathrm{Log}\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{R}_n.$$

Servons-nous du théorème de la moyenne pour simplifier R_n ; nous pouvons écrire

$$R_n = (-1)^n \int_0^x \frac{x^n dx}{1+x} = \frac{(-1)^n}{1+\theta x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Donc R_n tend vers 0, si $|x|$ est < 1 ou si $x = 1$. Si $x = -1$, la série devient Σn^{-1} et diverge. Donc le rayon de convergence de la série (1) est égal à l'unité.

La fonction Log $(1 + x)$ est donc exprimable en série illimitée de Maclaurin si l'on a $(-1 < x < 1)$, et la série illimitée diverge dans les autres cas.

Faisant $x = 1$, on obtient la série (non absolument convergente)

$$\text{Log}\, 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Le développement de Log $\frac{1+x}{1-x}$ peut se déduire de celui de Log $(1 + x)$. On peut aussi l'obtenir par un raisonnement analogue au précédent. On a

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1 - x^{2n} + x^{2n}}{1-x^2} = \sum_0^{n-1} x^{2k} + \frac{x^{2n}}{1-x^2}.$$

On multiplie par 2 et l'on intègre de 0 à x ; il vient

$$(2) \quad \text{Log}\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right] + R_n$$

$$R_n = 2\int_0^x \frac{x^{2n}dx}{1-x^2} = \frac{2}{1-\theta x^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

et R_n tend vers 0 si x est compris entre -1 et $+1$. Dans les autres cas, la série infinie diverge.

C'est la série (2) qu'on applique au calcul des logarithmes des nombres entiers. On fait

$$x = \frac{p-q}{p+q}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{p}{q} = \frac{1+x}{1-x},$$

et l'on choisit les entiers p et q de manière que $|x|$ soit < 1. On a

$$\text{Log}\, p = \text{Log}\, q + 2\left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5 + \dots\right].$$

Cette formule suffit pour le calcul des logarithmes des nombres entiers, car elle fait dépendre le calcul du logarithme de p

de celui d'un nombre inférieur q, et le logarithme de 1 est connu. En particulier, si $p = 2$, $q = 1$, il vient

$$\text{Log } 2 = 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}+\dots\right].$$

Cette série, à convergence rapide, convient beaucoup mieux au calcul de Log 2 que la première qui converge lentement.

397. Développement de l'arc-tangente. — Ce développement s'obtient comme le précédent. Partons de l'identité

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1-(-x^2)^n+(-x^2)^n}{1-(-x^2)} = \sum_0^{n-1}(-x^2)^k+\frac{(-x^2)^n}{1+x}.$$

Intégrons-la de 0 à x ; il vient $(0 < \theta < 1)$

$$(3)\quad \text{arc tg } x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+R_n,$$

$$R_n = (-1)^n\int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{1+x^2} = \frac{(-1)^n}{1+\theta x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Le reste R_n est inférieur en valeur absolue au premier terme négligé ; il tend vers 0, si $|x|$ ne surpasse pas l'unité. Donc arc tg x est représenté par la série illimitée si x varie entre -1 et 1, limites comprises. Le rayon de convergence est égal à l'unité, car c'est celui de la série dérivée $\Sigma(-x^2)^n$.

En particulier, pour $x = 1$, on trouve la formule de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots$$

Calcul de π. — La série (3) peut servir au calcul de π de la manière suivante. On calcule d'abord l'arc φ dont la tangente est $1:5$. La formule donne

$$\varphi = \frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5+\dots$$

On a ensuite

$$\text{tg } 2\varphi = \frac{2\text{ tg }\varphi}{1-\text{tg}^2\varphi} = \frac{5}{12},\qquad \text{tg } 4\varphi = \frac{2\text{ tg } 2\varphi}{1-\text{tg}^2 2\varphi} = \frac{120}{119},$$

d'où

$$\text{tg}\left(4\varphi-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tg } 4\varphi-1}{1+\text{tg } 4\varphi} = \frac{1}{239}.$$

On conclut de là, par la formule (3),

$$4\varphi-\frac{\pi}{4} = \frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5-\dots$$

On obtient ainsi la formule de *Machin* :

$$\pi = 16\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots\right] - 4\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \dots\right].$$

398. Série du binome. — Si m est égal à 0 ou à un entier positif, on sait par l'algèbre que $(1 + x)^m$ se réduit à 1 ou se développe en un polynome ordonné suivant les puissances de x. Laissons ce cas de côté. Soit m un nombre positif non entier ou un nombre négatif. Considérons la série illimitée

$$\sum_1^\infty u_n = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + \dots + m_n x^n + \dots$$

dont les coefficients, formés comme ceux du binome, sont

$$m_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n};$$

aucun des coefficients ne sera nul.

Le rayon de convergence est égal à la limite du rapport de deux coefficients consécutifs pris en valeur absolue (n° 384). Il est donc égal à l'unité, car on a, pour n infini,

$$\lim \left|\frac{m_n}{m_{n+1}}\right| = \lim \left|\frac{n+1}{m-n}\right| = 1.$$

La série converge si $|x|$ est < 1 et diverge si $|x| > 1$. Quant au cas où $x = \pm 1$, nous l'examinerons au n° 400.

Nous allons maintenant prouver que *si* $|x|$ *est* < 1, *la série du binome a pour somme* $(1 + x)^m$ et en déterminer le reste R_n.

A cet effet, soit $f(x)$ la somme des n premiers termes :

$$f(x) = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + \dots + m_{n-1} x^{n-1}.$$

En observant que deux coefficients consécutifs satisfont à la condition

$$n m_n - (m - n + 1) m_{n-1} = 0,$$

on vérifie de suite l'identité

$$m f(x) - (1 + x) f'(x) = (m - n + 1) m_{n-1} x^{n-1} = n m_n x^{n-1}.$$

En vertu de cette identité, on a

$$D\,\frac{f(x)}{(1+x)^m} = \frac{(1+x) f'(x) - m f(x)}{(1+x)^{m+1}} = -\frac{n m_n x^{n-1}}{(1+x)^{m+1}};$$

d'où, en intégrant de 0 à x (ce qui suppose $x > -1$ si m est > 0),

(4) $$\frac{f(x)}{(1+x)^m} - 1 = -n\, m_n \int_0^x \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+x)^{m+1}}$$

et, en remplaçant $f(x)$ par son développement,

(5) $$\left\{ \begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots + m_{n-1} x^{n-1} + R_n \\ R_n &= n\, m_n (1+x)^m \int_0^x \frac{x^{n-1}dx}{(1+x)^{m+1}}. \end{aligned} \right.$$

En faisant sortir le dénominateur du signe d'intégration par le théorème de la moyenne, on obtient l'expression simplifiée $(0 < \theta < 1)$

(6) $$R_n = m_n x^n \frac{(1+x)^m}{(1+\theta x)^{m+1}}.$$

Si x est > -1, cette expression montre que R_n tend vers zéro, avec le premier terme négligé $m_n x^n$, dans tous les cas de convergence, donc, en particulier, si x est aussi < 1.

Cas particulier. — Si $(m+1)$ est positif et < 1, on peut encore mettre l'expression du reste sous une forme utile. Supposant toujours $x > -1$, on a, par le changement de la variable d'intégration x en tx, et grâce aux deux hypothèses précédentes,

$$\int_0^x \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+x)^{m+1}} = x^n \int_0^1 \frac{t^{n-1}dt}{(1+tx)^{m+1}} = x^n\theta \int_0^1 \frac{t^{n-1}\,dt}{(1-t)^{m+1}} = \theta\frac{(-x)^n}{n\, m_n},$$

la dernière intégrale se calculant par parties.

Portant cette valeur dans (5), on obtient la formule suivante, qui suppose donc m négatif et > -1 :

(7) $$R_n = \theta(-x)^n(1+x)^m \qquad (0 < \theta < 1).$$

399. Ordre de grandeur des coefficients de la formule du binome. — Nous allons montrer que l'on peut poser

(8) $$|\, m_n \,| = \frac{h_n}{n^{m+1}},$$

h_n tendant vers une limite finie et différente de 0 quand n tend vers l'infini.

A cet effet, observons que l'on a (n étant supposé $> m+1$)

$$\left|\frac{m_n}{m_{n-1}}\right| = 1 - \frac{m+1}{n} = e^{\operatorname{Log}\left(1-\frac{m+1}{n}\right)}$$

D'ailleurs, en développant suivant les puissances de $(1 : n)$ par

la formule de Taylor et en s'arrêtant au deuxième ordre, on peut poser, λ_n gardant une valeur finie quand n tend vers l'infini,

$$\text{Log}\left(1-\frac{m+1}{n}\right)+(m+1)\,\text{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\lambda_n}{n^2}.$$

Il vient donc

$$\left|\frac{m_n}{m_{n-1}}\right|=e^{-(m+1)\,\text{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac{\lambda_n}{n^2}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{m+1}e^{\frac{\lambda_n}{n^2}}$$

Faisant $n = 2, 3, \ldots n$ et multipliant les résultats entre eux, on a

$$\left|\frac{m_n}{m_1}\right|=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{m+1}e^{\sum_2^n\frac{\lambda_k}{k^2}}$$

d'où, en comparant à la formule (8),

$$h_n=|\,m_1\,|\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{m+1}e^{\sum_2^n\frac{\lambda_k}{k^2}}$$

Cette quantité tend pour $n=\infty$ vers une limite finie et non nulle, car $2n:(n+1)$ tend vers 2 et la série $\Sigma(\lambda_n : n^2)$ est convergente comme $\Sigma(1 : n^2)$. Notre formule (8) est donc justifiée.

400. Cas de convergence de la série du binome quand $x = \pm 1$. — Si l'on fait $x = \pm 1$ dans la série du binome, elle devient (les signes se correspondant)

$$1 \pm m_1 + m_2 \pm m_3 + m_4 \pm \ldots$$

Si m est positif, la série est *absolument convergente* comme la série $\Sigma(h_n : n^{m+1})$.

Si m est $\leqslant -1$, le rapport $|\,m_n : m_{n-1}\,|$ est $\geqslant 1$, les termes ne tendent pas vers 0 et la série est *divergente*.

Reste donc à examiner le cas où m est compris entre -1 et 0. Dans ce cas, les termes vont constamment en décroissant en valeur absolue, car le rapport $|\,m_n : m_{n-1}\,|$ est < 1 ; et les termes tendent vers 0 comme $h_n : n^{m+1}$, de sorte que la convergence ne peut être absolue. La série *converge* pour $x = +1$, auquel cas les termes sont à signes alternés ; elle *diverge* si $x = -1$, auquel cas les termes sont tous positifs.

Remarque. — Si m est positif et x égal à -1, l'expression (5) de R_n (n° 398) prend la forme $0.\infty$, ce qui permet de se débarrasser du signe d'intégration. On fait tendre x vers -1 et l'on

applique la règle de l'Hospital à l'expression mise sous la forme $\infty : \infty$; on trouve

$$(9)\qquad R_n = n\, m_n \lim \frac{\int_0^x (1+x)^{-m-1} x^{n-1} dx}{(1+x)^{-m}} = n m_n \frac{(-1)^n}{m}.$$

401. Développement de l'arc-sinus. — Remplaçons x par $-x^2$, faisons $m = -\frac{1}{2}$ dans la formule du binome et prenons la valeur (7) du reste ; nous trouvons

$$(10)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_1^{n-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k} + \frac{\theta x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}},$$

en désignant par $k!!$ le produit des entiers non supérieurs à k et de même parité que k (n° 235). Intégrons de 0 à x, il vient

$$(11)\qquad \text{arc} \sin x = x + \sum_1^{n-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \theta \int_0^x \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ce qui montre que l'arc sinus est développable pour toutes les valeurs de x entre -1 et $+1$. Mais le développement reste légitime à ces limites, car, si $x = 1$, on a (n° 236)

$$\int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$

et cette quantité tend vers 0 avec le coefficient de x^{2n} dans la série (10).

On peut donc faire $x = 1$ et l'on trouve la série :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2k+1}.$$

402. Développements en séries des intégrales elliptiques complètes (n° 339). — Soit k^2 une quantité < 1 ; en remplaçant x par $k \sin \varphi$ dans la formule (10), il vient

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1.3}{2.4} k^4 \sin^4 \varphi + \ldots$$

Cette série converge uniformément dans tout intervalle en vertu du théorème du n° 376, car elle converge si $\sin \varphi = 1$, ce qui maxine tous les termes. Intégrons-la donc de 0 à $\pi : 2$, il vient

$$F_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots\right]$$

D'autre part, en remplaçant x par $-k^2 \sin^2 \varphi$ dans le développement de $\sqrt{1+x}$, on trouve la série, uniformément convergente pour toute valeur de φ,

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1.1}{2.4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1.1.3}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi - \dots$$

et, en intégrant de 0 à $\pi : 2$,

$$E_1(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots\right]$$

Toutes ces séries convergent rapidement si k est petit.

§ 6. Fonctions entières élémentaires. Exponentielles imaginaires.

403. Définitions. Formules d'Euler. — Nous savons (n°s 394 et 395) que, z étant réel, on a

$$(1)\quad e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ces séries convergent pour toutes les valeurs réelles ou complexes de z. Elles définissent donc des fonctions entières (n° 384). Il est naturel de conserver, pour représenter ces fonctions, les mêmes symboles dans le cas où la variable est complexe que dans celui où elle est réelle. Nous prendrons donc les équations (1) comme définitions de e^z, $\sin z$ et $\cos z$ pour toutes les valeurs, réelles ou complexes, de z.

On vérifie directement par ces définitions que l'on a

$$(2)\qquad \cos(-z) = \cos z, \qquad \sin(-z) = -\sin z,$$

$$(3)\qquad e^{zi} = \cos z + i\sin z, \qquad e^{-zi} = \cos z - i\sin z.$$

De là, *les formules fondamentales d'Euler* :

$$(4)\qquad \cos z = \frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi}),$$

qui ramènent les fonctions circulaires à la fonction exponentielle.

404. Généralisation des propriétés fonctionnelles de l'exponentielle et des fonctions circulaires. — En dérivant les séries (1), on obtient immédiatement, comme pour z réel,

$$(5)\qquad D.e^z = e^z, \qquad D.\cos z = -\sin z, \qquad D\sin z = \cos z.$$

Les règles de dérivations des fonctions composées subsistent sans difficulté quand les variables s nt complexes, car la définition générale de la dérivée est la même que quand les variables sont réelles.

Remplaçons, dans la série e^z, z par la somme $z + z'$ de deux quantités complexes. On peut ordonner la série ainsi obtenue suivant les puissances de z. En effet, quand on a remplacé toutes les puissances de $(z + z')$ par leurs développements, la série demeure absolument convergente. Elle converge effectivement quand on remplace z et z' par leurs modules r et r', ce qui donne une série à termes positifs. Or, dans une série absolument convergente, l'ordre des termes est indifférent (n° 373).

Le développement de $e^{z+z'}$ suivant les puissances de z est donné par la formule de Maclaurin. Comme toutes les dérivées sont égales à $e^{z'}$ pour $z = 0$, il vient

$$(6) \qquad e^{z+z'} = e^{z'}\left(1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2}\right) = e^z e^{z'}.$$

Donc toutes les propriétés fonctionnelles de l'exponentielle réelle s'étendent à l'exponentielle imaginaire, car elles se déduisent de l'équation précédente et de la condition $e^0 = 1$.

On vérifie l'exactitude des équations :

$$(7) \qquad \begin{aligned} \sin(z + z') &= \sin z \cos z' + \cos z \sin z', \\ \cos(z + z') &= \cos z \cos z' - \sin z \sin z', \end{aligned}$$

en remplaçant les sinus et cosinus par leurs expressions (4) et en tenant compte de l'équation (6). Donc toutes les propriétés fonctionnelles des lignes trigonométriques réelles s'étendent au domaine complexe, car elles se déduisent des relations précédentes en y joignant les équations (4) et les conditions :

$$\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1, \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

405. Décomposition des fonctions précédentes en leurs parties réelles et imaginaires. — Soit $z = x + yi$, x et y étant réels. Il vient, par les équations (6) et (3),

$$(8) \qquad e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Cette formule montre que e^z a pour module e^x et pour argu-

ment y. Comme e^x ne peut s'annuler x étant réel, *e^z ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle ou complexe de z.*

L'équation (8) montre que *e^z est une fonction périodique de période $2\pi i$*, c'est-à-dire que, si k est entier, l'on a

$$(9) \qquad e^{z+2k\pi i} = e^z.$$

Réciproquement, si l'on a $e^{\alpha+z} = e^{\alpha}$, z sera un multiple de $2\pi i$. En effet, cette équation donne

$$e^{\alpha}(e^z - 1) = 0, \quad \text{d'où} \quad e^z = 1, \quad e^x(\cos y + i \sin y) = 1,$$

d'où $x = 0$ et $y = 2k\pi$.

Les équations (7) et (4) donnent maintenant :

$$\sin(x + yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi$$
$$= \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

$$\cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi$$
$$= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Les modules du sinus et du cosinus se déduisent de là :

$$|\sin^2 z| = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 \sin^2 x + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 \cos^2 x$$
$$= \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 + \sin^2 x,$$

$$|\cos^2 z| = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 \cos^2 x + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 \sin^2 x$$
$$= \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 + \cos^2 x.$$

Ces formules montrent que le sinus et le cosinus ne peuvent s'annuler que si $y = 0$. Donc toutes les racines de ces fonctions sont réelles et, par conséquent, elles sont connues.

406. Fonctions hyperboliques. — On appelle *sinus* et *cosinus hyperboliques* les deux fonctions :

$$(10) \qquad \text{Sh} z = \frac{\sin iz}{i} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{Ch} z = \cos zi = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Ces fonctions ont pour dérivées :

$$\text{D. Sh} z = \text{Ch} z, \qquad \text{D. Ch} z = \text{Sh} z.$$

Elles satisfont à toute une série de formules analogues à celles de la trigonométrie ordinaire. La *trigonométrie hyperbolique* n'est pas distincte de la trigonométrie ordinaire. A toute formule de celle-ci correspond une formule de la première, qui s'obtient en rendant les variables purement imaginaires. En vertu des formules (10), le principe de transformation est celui-ci:

Toute formule de la trigonométrie du cercle en donne une de la trigonométrie hyperbolique en y remplaçant $\cos z$ *par* $\mathrm{Ch}z$ *et* $\sin z$ *par* $i\,\mathrm{Sh}z$.

Bien entendu, cette règle ne s'applique qu'aux fonctions rationnelles en $\sin z$ et $\cos z$. Ainsi, on tire des formules (7)

$$\mathrm{Sh}(z+z') = \mathrm{Sh}z\,\mathrm{Ch}z' = \mathrm{Ch}z\,\mathrm{Sh}z, \qquad \mathrm{Ch}(z+z') = \mathrm{Ch}z\,\mathrm{Ch}z' + \mathrm{Sh}z\,\mathrm{Sh}z',$$

et la relation $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ donne

$$\mathrm{Ch}^2 z - \mathrm{Sh}^2 z = 1.$$

Les fonctions étudiées dans les numéros précédents sont les plus simples des fonctions d'une véritable complexe. La théorie générale de ces fonctions ne sera pas exposée ici.

ERRATA.

Errata du tome I (3[e] édition)

pages	*lignes* (*)				
62	4	*au lieu de*	inferteure	*lisez*	inférieure
72	5'	»	N et, T	»	N et T,
169	16	»	JOUNG	»	YOUNG
202	1' et 2'	»	*arcs tangents*	»	*arcs tangentes*
392	3'	»	§ 5	»	§ 6
399	3	»	§	»	§ 1

Suite de l'errata du tome II (2[e] édition).

pages	*lignes*	
1	7	*au lieu de* Ce contour enveloppe une portion C *lisez* Ce contour C enveloppe une portion D
10	8	» $\iint_D (x, y)$ » $\iint_D f(x, y)$
53	3'	Supprimez dans l'énoncé les mots : *toujours non croissante ou* et complétez cet énoncé en faisant suivre la formule (2) des mots : *Si* $\varphi(x)$ *était non croissante, la formule subsisterait sauf qu'il faudrait y permuter* A *et* B.
76	dernière	*Ajoutez les mots* : si la série converge uniformément pour un choix arbitraire de $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$, l'intégrale converge aussi uniformément.
91	9	Ajoutez à l'énoncé du lemme les mots : *Il suffit pour cela que les côtes du polygone soient suffisamment petits.*
111	13 à 40	Dans l'énoncé et la démonstration de cette proposition préliminaire, il faut remplacer la fraction $\frac{1}{4}$ par $\frac{1}{9}$ (donc *quart* par *neuvième* et $\frac{3}{4}$ par $\frac{8}{9}$). D'autre part, l'ensemble E_n pouvant n'être pas mesurable (**), il faut remplacer mE_n] par m_eE_n.

(*) L'accent signifie qu'il faut compter en remontant.

(**) C'est M. Caratheodory qui m'a fait cette remarque, ce dont je le remercie. Il est encore facile de voir que m_eE_n tend vers mE, parce que chaque E_n est contenu dans un ensemble E'_n mesurable (B) et de mesure m_eE_n (t. I, n° 80). Si les mesures des E'_n (qui croissent quand ε_n décroît) avaient une limite $< mE$, l'ensemble limite restreint de la suite E'_1, $E'_2, \ldots$ serait aussi de mesure $< mE$ (t. II n° 90 ou t. I n° 81), ce qui est impossible car il contient E.

pages	*lignes*				
112	7'	*au lieu de*	$\varepsilon > 0$	*lisez*	$\varepsilon = 0$
118	3'	»	annulle	»	annule
128	7	»	x infini	»	n infini
129	5' et 10'	»	P_n	»	$D^p P_n$
132	14 et 15	»	$a \quad b$	»	$a' \quad b'$
135	18	»	$(1 - b_m) \cos mx$	»	$b_m(1 - \cos mx)$
138	1	»	1733	»	1753
142	8	»	$\int_0^\alpha$	»	$\int_a^\alpha$

149 6 *Ajoutez* : En effet, $\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{\sin k\alpha}{\alpha} d\alpha$ revient à la différence $\int_0^{k\varepsilon} - \int_0^{k\varepsilon'} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha$ de deux intégrales positives, chacune $< \int_0^\pi$ qui mesure la première arcade de la courbe $y = \sin \alpha : \alpha$ formée d'arcades décroissantes de signes alternés.

155	4	*au lieu de*	$F(2\pi) - F(0)$	*lisez*	$F(2\pi)$
»	5	Après le mot « bornée » ajoutez : et s'annulant aux limites 0 et 2π,			
156	11	*au lieu de*	positifs	*lisez*	positifs et $\leqslant 1$,
»	4'	Permutez les Z dans chaque parenthèse.			
160	5'	*au lieu de*	dx	*lisez*	$d\alpha$
170	10	»	Scharz	»	Schwarz
»	3'	»	$(x - x_0)^2$	»	$\frac{(x - x_0)^2}{2}$.
171	1	»	$f(x_0)$	»	que $f(x)$!
172	1'	»	$R_{n+1} - R_n$	»	$R_n - R_{n+1}$
173	7 et 8	Changez les signes de tous les R.			
196	5	*au lieu de*	$\sqrt{x^2 + y^2}$	*lisez*	$\sqrt{x^2 + y^2}\, dx$
208	15'	»	pa	»	px
223	12	»	yu	»	y^n
243	7'	»	e^{vx}	»	e^{rx}
272	12'	»	$\pm \frac{zady}{y}$	»	$\mp \frac{zady}{y}$
301	11'	»	$(i = 1, 2, \ldots n)$	»	$(i = 1, 2, \ldots n - 1)$
304	11	»	$\int_{x_0}^{x}$	»	$\int_{x_{10}}^{x_1}$
305	8	»	x_a	»	x_n
325	dernière	»	$\frac{\partial f}{\partial x_h}$	»	$\frac{\partial}{\partial x_h}$
329	10'	»	$+ a_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n}$	»	$+ a_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$

pages	*lignes*				
333	12	Donnez le n° 8 à cette équation.			
362	13	Remplacez Δ^p et Δ^q par ∇^p et ∇^q			
363	16	*au lieu de*	2°)	*lisez*	1°)
363	dernière	»	$x^{(p)}$ $x^{(p+1)}$	»	$x^{[p]}$ $x^{[p+1]}$.
409	20	»	(α)	»	α

Modifications à apporter aux renvois du t. II au t. I pour les mettre d'accord avec la 3e édition.

Pages	*Lignes*	*Anciennes références*	*Nouvelles références*
1	1'	§ 11	§ 9
2	1'	§ 4	§ 3 et 4
13	20	357	346
21	16	175	170
38	13'	208	202
40	10	348	339
53	13	244	232
64	8	245	233
78	2'	288 et 289	377 à 379
79	14	250	238
80	14	220	213
91	2	357	346
97	1'	253	239
99	4' et 12'	258	242
—	14	256	241
100	6'	255	240
101	19	59	54
103	14'	Chap. VI, § 3	Intr. § 11
104	7	266	77
—	14	267	78
—	23	270	81 (*)
—	30	271	85
105	18'	273	82
—	10'	273	84
106	3	274	82, 247, 253
107	16	275	245
108 et 109			Supprimez les notes
117	8	théor. VII (n° 289)	théor. VI (n° 263)
124	22	282	257
126	17	248	236
—	23	249	237
147	2'	Chap. IX, § 3	Intr. § 13
—	1'	361, 6°	88

(*) Les ensembles E_1, E_2,... étant supposés mesurables dans la 3e édit. du tome I, on se bornera aussi à ce cas dans l'énoncé du tome II et on considérera la mesure existante des ensembles-limites.

Pages	*Lignes*		
170	6	270	81
196	14	161	163
273	8 et 5'	314	302
295	9'	157	159
381	13	367	356
382	14	175	169
384	1'	403	392
398	6'	316	304
406	2	282	321
412	5	p. 302	p. 322
413	11'	p. 304	p. 323
—	9'	284, 302	303, 322
420	7'	327	320
436	5'	331	318

ADDITION AU TOME II (2e ÉDITION)

Complément au § 7 du chapitre IV : Unicité du développement trigonométrique.

Les résultats que nous avons exposés sur cette question dans la deuxième édition du tome II peuvent être considérablement généralisés, comme nous l'avons reconnu depuis et montré dans notre récent Mémoire *Sur l'Unicité du développement trigonométrique* (*). Il suffit, pour cela, de s'appuyer sur les théorèmes relatifs à la dérivée seconde généralisée auxquels nous avons consacré le § 4 du chapitre VIII du tome I (3e édition).

Nous allons exposer ici ces généralisations, en indiquant les additions qu'il convient de faire à cet effet respectivement aux nos 160, 163 et 168 du tome II (2e édition). On suppose ces additions intercalées respectivement dans le texte à la suite de chacun de ces nos.

Addition au no 160. — Voici un autre théorème, analogue au théorème précédent de M. Lebesgue :

Théorème. — *Une série trigonométrique dont le terme général est* $\rho_m \cos m(x - \alpha_m)$ *a l'une au moins de ses limites d'indétermination infinie presque partout si* ρ_m *n'est pas borné* (**).

Soit s_m la somme des m premiers termes de la série. Si s_m était borné quel que soit m, le terme général (qui est la différence de deux s_m consécutifs) le serait aussi. Il suffit donc de prouver que *si* ρ_m *n'est pas borné quel que soit m, le terme général* $\rho_m \cos m(x - \alpha_m)$ *ne peut l'être que pour un ensemble de valeurs de x de mesure nulle.*

Si ρ_m n'est pas borné, on peut extraire de la suite positive $\rho_1, \rho_2, \dots$ une suite constamment croissante. Il suffit de démontrer la proposition par celle-ci. Admettons donc tout de suite que ρ_m croisse avec m.

Soit E_m l'ensemble des points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ pour lesquels on a

$$|\rho_m \cos m(x - \alpha_m)| > \sqrt{\rho_m} \qquad \text{ou} \qquad \cos m(x - \alpha_m) > \frac{1}{\sqrt{\rho_m}}.$$

(*) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique.* (Classe des sciences) no 11, 1912 et no 1, 1913.

(**) C. de la Vallée Poussin, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique.* (Classe des sciences), 1913, no 1, pp. 9-14.

La mesure de E_m tend évidemment vers 2π quand m et ρ_m avec lui tendent vers l'infini.

Or $\rho_m \cos m(x - \alpha_m)$ ne peut être borné quel que soit m si x appartient à une infinité d'ensembles de la suite $E_1, E_2, \ldots$ c'est-à-dire à l'ensemble limite complet E de cette suite. Mais, quelque petit que soit ε, cette suite contient une infinité d'ensembles de mesures $> 2\pi - \varepsilon$, donc E est de mesure $> 2\pi - \varepsilon$ (t. I, n° 81) et, par conséquent, de mesure 2π, puisque ε est arbitraire. Ainsi son complémentaire (qui contient tous les points où ρ_m est borné) est de mesure nulle, C. Q. F. D.

Addition au n° 163. — Remarque. — On démontre d'une manière analogue la proposition suivante :

Si, pour une valeur donnée de x, la somme s_n des n premiers termes de la série (1) *est bornée quel que soit n, l'expression* (3) *le sera aussi quand α tendra vers* 0 *et ses limites d'indétermination ne surpasseront pas en valeur absolue l'expression kS, où k est un facteur numérique indépendant de x et* S *la plus grande limite de* $|s_n|$.

En effet, en substituant $s_{n+1} - s_n$ à A_n, l'expression (3) devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right].$$

Pour déterminer les limites d'indétermination de cette somme, on peut faire abstraction d'un nombre de termes aussi grand qu'on veut au début, car tous ces termes tendent vers 0. On peut donc raisonner comme si tous les s_n ne pouvaient surpasser qu'infiniment peu S. Les limites d'indétermination ne surpasseront donc pas en valeur absolue

$$\sum_1^{\infty} S \left| \int_{(n-1)\alpha}^{n\alpha} d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \right| < S \int_0^{\infty} \left| d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \right|,$$

ce qui prouve la proposition.

Addition au n° 168. — La démonstration de ce théorème de M. Lebesgue résulte naturellement des principes exposés dans les nos précédents. Mais on peut aller beaucoup plus loin, à la condition d'utiliser les théorèmes plus généraux sur la dérivée seconde généralisée, exposés dans le tome I (Chap. VIII, § 4). On a, en effet, le théorème suivant :

Théorème. — *Si une fonction* finie et sommable $f(x)$ *de période* 2π *admet un développement trigonométrique, ce ne peut être que celui de Fourier.*

Comme $f(x)$ est la dérivée seconde généralisée de la fonction $F(x)$ définie par (2) en chaque point de convergence de la série (1) (n° 163), le théorème précédent n'est qu'un cas particulier du théorème plus général que voici :

THÉORÈME. — *Soit toujours s_n la somme des n premiers termes de la série trigonométrique quelconque* (1), *convergente ou non. Si, n tendant vers l'infini, les plus grande et plus petite limites de s_n sont des fonctions finies et sommables de x, la série trigonométrique* (1) *est la série de Fourier de chacune des dérivées secondes généralisées (supérieure et inférieure) de* $F(x)$.

Soient $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ les limites d'indétermination (fonctions de x) de s_n quand n tend vers l'infini. Elles sont donc finies et sommables par hypothèse.

La fonction $F(x)$ construite par la formule (2) sera continue (nº 162), parce que les coefficients a_n et b_n seront bornés par hypothèse (en vertu du théorème indiqué ci-dessus comme addition au nº 160) et, par conséquent, la série (2) sera uniformément convergente.

Considérons, pour fixer les idées, la dérivée seconde généralisée supérieure de $F(x)$. Cette fonction $\varphi_1(x)$ est la plus grande limite de $\Delta^2 F(x) : 4\alpha^2$ quand α tend vers 0 ; elle est donc *finie* et *sommable*, parce qu'elle ne peut surpasser la fonction sommable $k \mid \psi_1 \mid + k \mid \psi_2 \mid$ en vertu de la remarque ajoutée ci-dessus au nº 163.

La primitive de $\varphi_1(x)$ se construit donc par le théorème du nº 276 du tome I (en y remplaçant f par φ_1) ; il vient ainsi

$$F(x) = \int_a^x dx \int_a^x \varphi_1(x)\, dx + px + q,$$

$$F'(x) = \int_a^x \varphi_1(x) + p.$$

Soient α_m et β_m les constantes de Fourier de $\varphi_1(x)$, à savoir

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(x) \cos mx\, dx, \qquad \beta_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(x) \sin mx\, dx.$$

Multiplions par $\frac{1}{\pi} \cos mx\, dx$ les identités

$$\Delta^2 F(x) = \int_0^{2\alpha} [F'(x+t) - F'(x-t)]\, dt = \int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{t} \varphi_1(x+u)\, du\,;$$

puis intégrons les deux membres extrêmes par rapport à x de 0 à 2π. Observons que l'intégration peut se faire sous le signe $\int$ et que φ_1 étant périodique, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(x+u) \cos mx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(x) \cos m(x-u)\, dx$$
$$= \alpha_m \cos mu + \beta_m \sin mu\,;$$

nous trouvons ainsi (l'intégrale du sinus étant nulle)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^2 F(x) \cos mx\, dx = \alpha_m \int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{t} \cos mu\, du = 4\alpha_m \frac{\sin^2 m\alpha}{m^2}.$$

D'autre part, en remplaçant $\Delta^2 F(x)$ par son développement uniformément convergent tiré de (3), à savoir

$$\Delta^2 F(x) = 4 \sum_0^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2,$$

nous trouverons comme valeur de la même intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^2 F(x) \cos mx \, dx = 4 a_m \frac{\sin^2 m\alpha}{m^2}.$$

Comparant les deux résultats, il vient $a_m = \alpha_m$; de même, $b_m = \beta_m$. Donc la série (1) est la série de Fourier de $\varphi_1(x)$. C. Q. F. D.

Le théorème précédent peut encore être généralisé de la manière suivante :

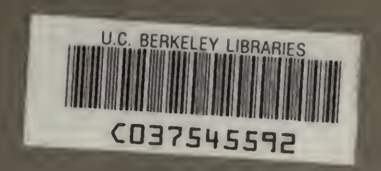
Théorème. — *Considérons une série trigonométrique* (1) *dont les coefficients tendent vers* 0. *Si les plus grande et plus petite limites de* s_n *pour* n *infini sont des fonctions sommables de* x, *finies sauf peut-être dans un ensemble* E, *la série trigonométrique sera la série de Fourier de chacune des dérivées secondes généralisées de* $F(x)$, *pourvu que l'ensemble* E *n'ait pas la puissance du continu ou ne contienne pas d'ensemble parfait.*

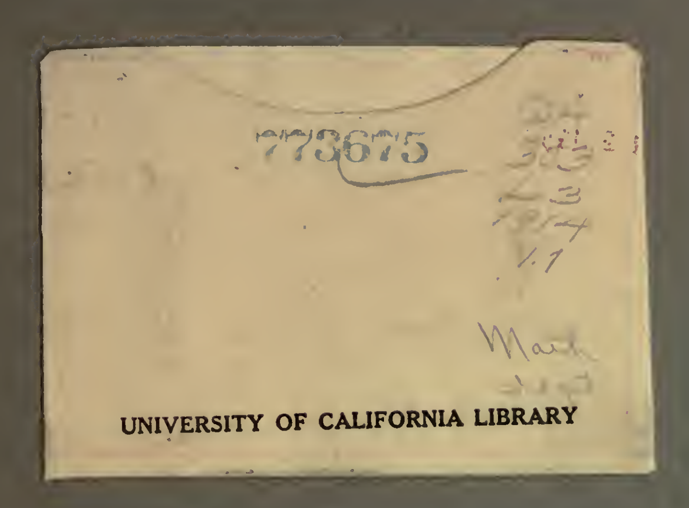
Ce théorème se démontre comme le précédent en substituant seulement au théorème du nº 276 du tome I celui du nº 277. On observe que, a_n et b_n tendant vers 0 par hypothèse, $F(x)$ vérifie la condition (K) invoquée dans ce théorème, en vertu du deuxième théorème de Riemann (nº 164).

Ce théorème fournit, en particulier, l'extension suivante du théorème d'unicité de Heine-Cantor (nº 165) :

Corollaire. — *Une fonction* $f(x)$ *périodique de période* 2π *ne peut admettre deux développements trigonométriques qui convergent partout et cela vers* $f(x)$, *sauf dans un ensemble n'ayant pas la puissance du continu ou ne contenant pas d'ensemble parfait (en particulier, dans un ensemble dénombrable).*

On se débarrasse ainsi, comme on le voit, de la condition de réductibilité admise au nº 165.


U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037545592


773675
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

